

カーネルウィーナーフィルタ Kernel Wiener Filter

鷲沢 嘉一*

Yoshikazu WASHIZAWA

山下 幸彦†

Yukihiko YAMASHITA

Abstract: Wiener filter is used widely for inverse problems. From a observed signal, it provides the best restored signal with respect to the square error averaged over the original signal and the noise among linear operators. In this paper, we provide the kernel Wiener filter which is a kernel based extension of the Wiener filter. When the kernel method is applied to the Wiener filter directly, the dimension of the space where the calculation has to be done is very large since samples of the noise have to be used. Then, by using the first order approximation of a kernel function, we provide a realistic solution. Moreover, we provide the experimental result in order to show the advantage of this method.

Keywords: Wiener filter, kernel based method, inverse problem, image restoration

1 まえがき

線形逆問題は、観測信号から原信号を推定する問題であり、劣化信号の復元、画像復元を初めとして広い分野に应用されている [10]。 \mathcal{H}_S , \mathcal{H}_O を、それぞれ原信号空間、観測信号空間とする。 $f \in \mathcal{H}_S$ で原信号を表し、観測作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S, \mathcal{H}_O)$ により観測空間の元に変換され、これに雑音 n が加わり、観測信号 $g = Af + n \in \mathcal{H}_O$ が得られるものとする。ここで、 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S, \mathcal{H}_O)$ は、 \mathcal{H}_S から \mathcal{H}_O への有界線形作用素の全体である。また、観測信号 g から元の空間の推定信号 \hat{f} を求める作用素を X とする。この線形逆問題のモデルを図 1 に示す。これを式で表せば、

$$g = Af + n \quad (1)$$

$$\hat{f} = Xg \quad (2)$$

となる。すなわち、線形逆問題とは観測信号 g から原信号 f に対する最良な推定信号 \hat{f} を求める問題、または、そのための \mathcal{H}_O から \mathcal{H}_S を作用素 X を求める問題と考えることができる。

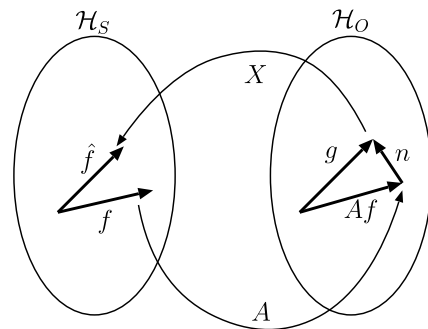


図 1: 線形逆問題

線形逆問題のための、線形または非線形の様々な逆変換が提案されている。線形逆変換としては、一般逆フィルタ [1]、ウィーナーフィルタ [5]、射影フィルタ族 [14]、[11]、[12]、[9] 等が、非線形な変換としては、制約条件付き最小 2 乗フィルタ [7]、凸射影法 [8] 等が提案されている。この中で、ウィーナーフィルタは原信号 f と推定信号 $\hat{f} = Xg$ の 2 乗誤差を、原信号と雑音について平均的に最小にする線形な変換 X として定義されている。逆変換のための評価基準の中には、観測信号空間で復元の良さを評価するものも多いが、ウィーナーフィルタは、評価基準が原信号と復元信号を原信号空間で直接的に比較している、その構成が簡単であるという利点を持っており、極めて広い範囲で应用されている。

また、近年カーネル法がパターン認識の分野で注目を

*理工学研究科・東京工業大学, 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, tel. 03-5734-3906, e-mail washizawa@ide.titech.ac.jp.

Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, Ookayama, Meguroku, Tokyo 152-8552, Japan

†理工学研究科・東京工業大学, 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, tel. 03-5734-3497, e-mail yamasita@ide.titech.ac.jp.

Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, Ookayama, Meguroku, Tokyo 152-8552, Japan

集めている．入力となるベクトル空間から非線形写像で次元が高い(場合によっては無限次元の)ベクトル空間へ写像し，その空間の中で処理を行う．その高次元空間での線形処理はもとの信号にとっては非線形処理となり，柔軟な処理が可能となる．そして，いわゆるカーネルトリックによって，写像した先の次元の高い空間での様々な計算が，直接その空間で計算するのではなく，サンプル次元の空間で計算することが可能になり，その応用範囲を広げることが可能になった．ただし，どのような非線形写像に対してもカーネルトリックが適用できるわけではなく，マーサーカーネル [3] から導かれる非線形写像に限られている．しかしながら，カーネル法は，サポートベクタマシン [2] やカーネル主成分分析 [6] を用いたパターン認識 [15], [13]，また，カーネル主成分分析による雑音の除去 [4] に関して応用され，認識精度や雑音除去性能を向上させている．

本論文では，ウィーナーフィルタにカーネル法を適用して，非線形なウィーナーフィルタを構成する．一般に信号や雑音が正規分布に従うとき，ウィーナーフィルタはベイズ推定の意味でも最適解を与える．すなわち，逆写像を線形に限っているにも係わらず，非線形写像を含めた中でも最良の解を与えると考えることができる．しかしながら，一般に画像などの信号は正規分布に従っていない．また，雑音もインパルス性雑音など，正規分布に従わない場合もある．従って，ウィーナーフィルタを非線形に拡張することによって，復元性能を向上させることができると考えられる．直接的にウィーナーフィルタを非線形に拡張する方法も考えられるが，本論文ではカーネル法を用いてウィーナーフィルタを非線形に拡張する．しかしながら，カーネル法をそのままの形で導入すると，雑音も標本点として数えなくてはいけなくなるため，カーネルトリックを使っても計算量が莫大になる．そこで，雑音の大きさが信号よりも小さいと仮定して，非線形写像の 1 次のテーラ展開を考える．そして，非線形写像したベクトルやその 1 次微分のベクトルの内積が，カーネル関数の 1 次微分で表されることを用いて，非線形写像した空間でのウィーナーフィルタを近似的に求める．カーネルウィーナーフィルタは，ウィーナーフィルタ自体の応用範囲が広いこと，また，本カーネルウィーナーフィルタによる非線形写像した空間での復元信号と，ある信号ベクトルを非線形写像したもとの距離は，解析的に求めることができることなどから，広い範囲で応用することができると考えられる．

また，本論文では USPS 文字の画像復元実験によって，カーネルウィーナーフィルタの有効性を示す．

2 ウィーナーフィルタ

ウィーナーフィルタは，復元信号と原信号の原信号と雑音に関する平均 2 乗誤差を最小にするものであった． E_f ， E_n で，それぞれ， f ， n に関するアンサンブル平均を表す．ベクトル f ， g に対して， f と g の内積を $\langle f, g \rangle$ で， f のノルムを $\|f\| (= \sqrt{\langle f, f \rangle})$ で表す，このとき，ウィーナーフィルタは，以下の評価基準 J_{WF} を最小にする線形作用素 X として定義される．

$$J_{WF} = E_f E_n \|f - \hat{f}\|^2 = E_f E_n \|f - Xg\|^2 \quad (3)$$

f と g の Neumann-Schatten 積は，任意のベクトル h に対して，

$$(f \otimes \bar{g})h = \langle h, g \rangle f \quad (4)$$

によって定義される．そして，

$$R = E_f (f \otimes \bar{f}) \quad (5)$$

$$Q = E_n (n \otimes \bar{n}) \quad (6)$$

は，それぞれ，原信号と雑音の相関作用素である．作用素 A の共役作用素を A^* で表し，

$$ABA = A \quad (7)$$

$$BAB = B \quad (8)$$

$$(AB)^* = AB \quad (9)$$

$$(BA)^* = BA \quad (10)$$

を満たす B を A に対する Moore-Penrose 一般逆と呼び， A^\dagger で表す．

以上の準備の元に，ウィーナーフィルタ $X = X_{WF}$ は，原信号と雑音が無相関であるとするれば，以下の式で与えられる．

$$X_{WF} = RA^*(ARA^* + Q)^\dagger \quad (11)$$

3 カーネル法

カーネル法について述べるために，まず，マーサーカーネル [3] について説明する．入力空間を X とし， (X, μ) を測度有限な測度空間とする． $L_\infty(X)$ を X 上で定義される有界な可測関数全体の集合とし， $L_2(X)$ を X 上で定義される 2 乗可積分な可測関数全体の集合とする．このとき， $k \in L_\infty(X^2)$ を対称な関数とし，線形変換 $T_k : L_2(X) \rightarrow L_2(X)$ を

$$T_k f(\cdot) = \int_X k(\cdot, y) f(y) d\mu(y) \quad (12)$$

で定義する． T_k は半正定値作用素であるものとする．以上の条件を満たす 2 変数関数 k をマーサーカーネル

と呼ぶ。このとき、 T_k の正の固有値を λ_j ($j \in \mathbb{J}$) とし、 $\psi_j \in L_2(X)$ を λ_j に対応する正規化固有関数とすると、以下の関係が成立する。

1. $(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in l_1$
2. $\psi_j \in L_\infty(X)$ かつ $\sup_j \|\psi_j\|_{L_\infty} < \infty$
3. $k(x, y) = \sum_{j \in \mathbb{J}} \lambda_j \psi_j(x) \psi_j(y)$ がほとんどすべての (x, y) について成り立つ。また、この和はほとんどすべての (x, y) について絶対一様収束する。

ここで、 l_1 は絶対和が有界な数列全体の集合である。

任意のマーサーカーネル k に対して k が再生核となる再生核ヒルベルト空間が存在することが分かっている。 $\Phi: x \mapsto k(\cdot, x)$ で、 $x \in X$ から再生核ヒルベルト空間への写像を定義する。すなわち、 $\Phi(x)$ はその再生核ヒルベルト空間の元となる。その再生核ヒルベルト空間の内積も、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す。このとき、

$$\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \langle k(\cdot, x), k(\cdot, y) \rangle = k(x, y) \quad (13)$$

が成立する。従って、 $\Phi(x)$ の値を陽に求めること無く、高次元空間での内積が入力空間のベクトルのカーネル関数の値として求めることができる。この性質を使って、結果が非常に大きな次元になってしまう $\Phi(x)$ を計算することなく、サンプル点数の次元で必要な量を計算する方法を、カーネルトリックと呼ぶ。

カーネル法ではマーサーカーネルから導かれる写像 Φ を用いて観測信号を再生核ヒルベルト空間へ写像する。この空間を特徴空間と呼ぶことにする。また、この空間は一般に元の信号空間の次元より高く、 Φ は非線形なものになる。よく用いられているマーサーカーネルとして以下のものがある。

$$\begin{aligned} \text{Gaussian} \quad k(x, y) &= \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{c}\right) \\ \text{Polynomial} \quad k(x, y) &= (\langle x, y \rangle + 1)^d \end{aligned}$$

4 カーネルウィーナーフィルタ

カーネルウィーナーフィルタは、ウィーナーフィルタにカーネル法を適用したものである。カーネル法による逆問題の枠組みを図2に示す。

原信号 f と観測信号 g をマーサーカーネルによる写像 Φ_S, Φ_O によりそれぞれ原信号特徴空間 \mathcal{F}_S 、観測信号特徴空間 \mathcal{F}_O へ写像する。このときカーネルウィーナーフィルタを $\Phi_S(f)$ と $X\Phi_O(g)$ の2乗誤差が f と g のアンサンブル平均について最小になる変換 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_O, \mathcal{F}_S)$ として定義する。すなわち、以下の評価基準 J_{KWF} を最小にする X として与えられる。

$$J_{KWF} = E_{f,n} \|\Phi_S(f) - X\Phi_O(g)\|^2 \quad (14)$$

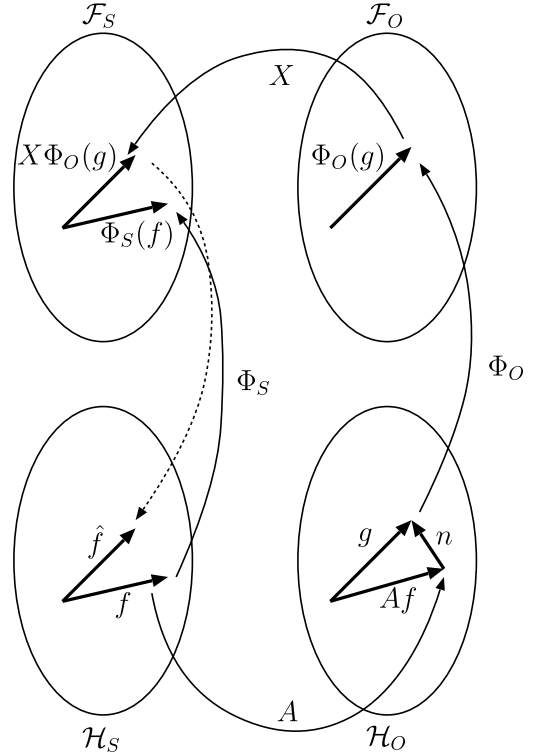


図2: カーネル法による逆問題

しかしながら、この定義式では Φ_S が非線形であるため、 $g = Af + n$ の分解ができない。従って、雑音に関してサンプル点数として数える必要があり、カーネルトリックを使っても、大きな次元の空間で計算しなくてはならない。そこで Af が n に比べて十分に大きいとして以下の1次近似を行い、計算を簡略化する。ここでは、 H_O を N 次元ベクトル空間とする。

$$\Phi_O(Af + n) \approx \Phi_O(Af) + \sum_{i=1}^N n_i \phi_{O,i}(Af) \quad (15)$$

ここで、

$$\phi_{O,i}(f) = \frac{\partial \Phi_O}{\partial f_i} \quad (16)$$

である。また、この $\phi_{O,i}(f)$ は $\Phi_O(f)$ と同じ次元のベクトルとなるため、実際には計算することが困難である。そこで、これに関係する内積をカーネル関数の微分を使って表す。そのために、 $k_{O,i}(x, y)$ 、 $k_{O,ij}(x, y)$ を、

$$k_{O,i}(x, y) = \langle \Phi_O(x), \phi_i(y) \rangle = \frac{\partial}{\partial y_i} k(x, y) \quad (17)$$

$$k_{O,i}^j(x, y) = \langle \phi_i(x), \Phi_O(y) \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} k(x, y) \quad (18)$$

$$k_{O,ij}(x, y) = \langle \phi_i(x), \phi_j(y) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} k(x, y) \quad (19)$$

と定義する。カーネルウィーナーフィルタを現実的に計算できるようにするためには、 Φ_S 、 Φ_O 等を使うことなく、

$k(x, y), k_{O,i}(x, y), k_{O,i}(x, y)$ だけで，復元信号を求めることができる式を導く必要がある．

$f^i (i = 1, \dots, L) \in \mathbb{R}^N$ を原信号のサンプルとする． $g \in \mathcal{H}_O$ に対して， $L(N+1)$ 次元ベクトル $h(g)$ を，

$$\begin{aligned} h(g) = & (k_O(g, Af^1), \dots, k_O(g, Af^L), \\ & k_{O,1}(g, Af^1), \dots, k_{O,1}(g, Af^L), \\ & \dots \\ & k_{O,N}(g, Af^1), \dots, k_{O,N}(g, Af^L))^T \end{aligned} \quad (20)$$

と定義し，以下の行列を定義する．

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} k_O(Af^1, Af^1) & \dots & k_O(Af^1, Af^L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_O(Af^L, Af^1) & \dots & k_O(Af^L, Af^L) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\tilde{K}_j = \begin{bmatrix} k_{O,j}(Af^1, Af^1) & \dots & k_{O,j}(Af^1, Af^L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{O,j}(Af^L, Af^1) & \dots & k_{O,j}(Af^L, Af^L) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$K = [\tilde{K} \ \tilde{K}_1 \ \tilde{K}_2 \ \dots \ \tilde{K}_N] \quad (23)$$

$$\tilde{K}^j = \begin{bmatrix} k_O^j(Af^1, Af^1) & \dots & k_O^j(Af^1, Af^L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_O^j(Af^L, Af^1) & \dots & k_O^j(Af^L, Af^L) \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\tilde{K}_{ji} = \begin{bmatrix} k_{O,ji}(Af^1, Af^1) & \dots & k_{O,ji}(Af^1, Af^L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{O,ji}(Af^L, Af^1) & \dots & k_{O,ji}(Af^L, Af^L) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$K_j = \sigma_j [\tilde{K}^j \ \tilde{K}_{j1} \ \tilde{K}_{j2} \ \dots \ \tilde{K}_{jN}] \quad (26)$$

とおく．また，原信号と雑音は独立で，雑音の各要素は無相関であるとする．従って，

$$Q = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2) \quad (27)$$

とおく．次の定理によって，カーネルウィーナーフィルタによる特徴空間での復元信号を求めることができる．

[定理 1]

観測信号 g に対するカーネルウィーナーフィルタによる特徴空間での復元信号は，次の式で与えられる．

$$X\Phi_O(g) = \sum_{i=1}^L \left(K(K^\top K + \sum_{j=1}^N \sigma_j^2 K_j^\top K_j)^\dagger h(g) \right)_i \Phi_S(f^i) \quad (28)$$

式 (28) で得られた解は \mathcal{F}_S に存在するのでこれを原空間 \mathcal{H}_S へ変換する必要がある．マーサーカーネルが Gaussian カーネルの場合，逆写像は一般には存在しない．そこで以下の評価基準 $\rho(z)$ を最小にする z を復元信号 \hat{f} とする．

$$\rho(z) = \|\Phi_S(z) - X\Phi_O(x)\|^2 \quad (29)$$

$\rho(z)$ 値が，カーネル関数とその微分の値だけで求められることは明らかである．

5 雑音除去実験

カーネルウィーナーフィルタを用いて画像のノイズ除去の実験を行った．画像はパターン認識用のデータベース USPS を用いた．USPS は 16×16 ピクセルで予め $[-1, 1]$ に正規化されている．サンプルとして '0', '2' の画像それぞれ 10 枚を使用し，別の各 10 枚に雑音を加え，WF, KWF によって復元した．雑音の分散は 0.5, 0.05 の 2 種類，カーネル関数には Gaussian カーネルの $c = 50, 128$ を用いた．実験結果を表 1 に示す．

実験結果より WF よりも KWF の方が見た目には原画像に近いことが分かる．2 乗誤差の平均 ϵ は WF の方が KWF よりも小さくなっているが，特徴空間の 2 乗誤差の平均 ϵ^ϕ は KWF の方が小さくなっている．また， $c = 50$ の方がエッジがはっきりとしているがこれはカーネルの分散が小さいため，サンプルに適合しているためであると考えられる．

6 おわりに

本論文ではウィーナーフィルタにカーネル法を適用したカーネルウィーナーフィルタを提案し，雑音除去実験においてその有効性を示した．今後の課題としては，原信号空間の内積で評価したカーネルウィーナーフィルタの実現，最適なカーネルの選択法，計算量の削減，他の分野への応用についての研究が必要である．

謝辞

本研究は，文部科学省科学研究費補助金 (No.15500101) の補助を受けた．

付録 (定理 1 の証明)

$$\begin{aligned} J &= E_n \sum_{i=1}^L \|\Phi_S(f^i) - X\Phi_O(g^i)\|^2 \\ &\approx E_n \sum_{i=1}^L \|\Phi(f^i) - X\Phi(Af^i) - X \sum_{l=1}^N n_l \phi_l(Af^i)\|^2 \end{aligned}$$

表 1: 実験結果

Parameter										ϵ		ϵ^Φ	
c	σ^2	Original	+ Noise	KWF	WF	Original	+ Noise	KWF	WF	KWF	WF	KWF	WF
128	0.05									103	79.4	0.814	0.891
128	0.5									115	87.2	0.860	0.958
50	0.05									145	79.4	0.990	1.51
50	0.5									145	87.2	0.998	1.58

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^L \left\{ \|\Phi_S(f^i)\|^2 + \|X\Phi_O(Af^i)\|^2 \right. \\
 &\quad + E_n \|X \sum_{l=1}^N n_l \phi_{O,l}(Af^i)\|^2 \\
 &\quad - 2\langle \Phi_S(f^i), X\Phi_O(Af^i) \rangle \\
 &\quad - 2E_n \langle \Phi_S(f^i), X \sum_{l=1}^N n_l \phi_{O,l}(Af^i) \rangle \\
 &\quad \left. + 2E_n \langle X\Phi_O(Af^i), X \sum_{l=1}^N n_l \phi_{O,l}(Af^i) \rangle \right\} \quad (30)
 \end{aligned}$$

第 1 項は X に依存せず，第 5，6 項は 0 になるので，次の J' を最小にすればよい．

$$\begin{aligned}
 J' &= \sum_{i=1}^L \left\{ \|X\Phi_O(Af^i)\|^2 \right. \\
 &\quad + E_n \|X \sum_{l=1}^N n_l \phi_{O,l}(Af^i)\|^2 \\
 &\quad \left. - 2 \langle \Phi_S(f^i), X\Phi_O(Af^i) \rangle \right\} \quad (31)
 \end{aligned}$$

作用素 X を次のように置くことができる．

$$X = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{L(N+1)} \alpha_{ij} (\Phi_S(f_i) \otimes \bar{v}_j) \quad (32)$$

$$v_i = \begin{cases} \Phi_O(Af^i) & 1 \leq i \leq L \\ \varphi_{i-L} & L+1 \leq i \leq L(N+1) \end{cases} \quad (33)$$

$$\varphi_i = \begin{cases} \phi_{O,1}(Af^i) & 1 \leq i \leq L \\ \phi_{O,2}(Af^{i-L}) & L+1 \leq i \leq 2L \\ \vdots & \vdots \\ \phi_{O,N}(Af^{i-(N-1)L}) & (N-1)L+1 \leq i \leq NL \end{cases} \quad (34)$$

(35)

これを代入すれば，

$$\begin{aligned}
 J' &= \sum_{i=1}^L \left\{ \left\| \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{L(N+1)} \alpha_{jk} \langle \Phi_O(Af^i), v_k \rangle \Phi_S(f^j) \right\|^2 \right. \\
 &\quad + E_n \left\| \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{L(N+1)} \sum_{l=1}^N n_l \alpha_{jk} \langle \phi_{O,l}(Af^i), v_k \rangle \Phi_S(f^j) \right\|^2 \\
 &\quad - 2 \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{L(N+1)} \alpha_{jk} \langle \Phi_O(Af^i), v_k \rangle \langle \Phi_S(f^i), \Phi_S(f^j) \rangle \left. \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{L(N+1)} \left\{ \sum_{j'=1}^L \sum_{k'=1}^{L(N+1)} \right. \\
 &\quad \left(\alpha_{jk} \alpha_{j'k'} \langle \Phi_O(Af^i), v_k \rangle \right. \\
 &\quad \left. \langle \Phi_O(Af^i), v_{k'} \rangle \langle \Phi_S(f^j), \Phi_S(f^{j'}) \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l=1}^N \sigma_l^2 \alpha_{jk} \alpha_{j'k'} \langle \phi_{O,l}(Af^i), v_k \rangle \right. \\
 &\quad \left. \langle \phi_{O,l}(Af^i), v_{k'} \rangle \langle \Phi_S(f^j), \Phi_S(f^{j'}) \rangle \right) \\
 &\quad \left. - 2 \alpha_{jk} \langle \Phi_O(Af^i), v_k \rangle \langle \Phi_S(f^i), \Phi_S(f^j) \rangle \right\} \quad (36)
 \end{aligned}$$

となる． $(L, L(N+1))$ ， (L, L) 行例 B ， K_1 を以下のように定義する．

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1(L(N+1))} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{L1} & \dots & \alpha_{L(L(N+1))} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_S(f^1, f^1) & \dots & k_S(f^1, f^L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_S(f^L, f^1) & \dots & k_S(f^L, f^L) \end{bmatrix} \quad (38)$$

これを代入して，

$$J' = \text{tr}[KB^T K_1 BK^T] + \sum_{j=1}^N \text{tr}[K_j B^T K_1 BK_j^T] - 2\text{tr}[KB^T K_1] \quad (39)$$

となる，これを B に関して変分して， δB に関する 2 次の項を無視すれば，

$$\begin{aligned} & J'(B + \delta B) - J'(B) \\ &= \text{tr}[K(\delta B)^T K_1 BK^T + KB^T K_1(\delta B)K^T] \\ &+ \sum_{l=1}^N (K_l(\delta B)^T K_1 BK_l^T + K_l B^T K_1(\delta B)K_l^T) \\ &- 2K(\delta B)^T K_1 \\ &= 2\text{tr}[(\delta B)^T K_1 BK^T K \\ &+ \sum_{l=1}^N (\delta B)^T K_1 BK_l^T K_l - (\delta B)^T K_1 K] \quad (40) \end{aligned}$$

となるので，

$$K_1 B(K^T K + \sum_{j=1}^N K_j^T K_j) = K_1 K \quad (41)$$

が成立するとき J' は最小になる．これを解くと，

$$B = K(K^T K + \sum_{j=1}^N K_j^T K_j)^{-1} \quad (42)$$

となる．従って， g に対する特徴空間での復元結果は，

$$X\Phi_O(g) = \sum_i^L \sum_j^{L(N+1)} \alpha_{ij}(\Phi_S(f_i) \otimes \bar{v}_j)\Phi_O(g) \quad (43)$$

$$= \sum_i^L \sum_j^{L(N+1)} \alpha_{ij}\langle \Phi_O(g), v_j \rangle \Phi_S(f_i) \quad (44)$$

$$= \sum_i^L (Bh)_i \Phi_S(f_i) \quad (45)$$

となる．

参考文献

- [1] H.C. Andrews and B.R. Hunt, Digital Image Restoration, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1977.
- [2] C. Cortes and V. Vapnik, "Support-vector networks," Machine Learning, vol.20, no.3, pp.273–297, 1995.
- [3] J. Mercer, "Functions of positive and negative type, and their connection with the theory of integral equations.," Trans. Lond. Phil. Soc. (A), vol.209, pp.415–446, 1909.
- [4] S. Mika, B. Schölkopf, A.J. Smola, K.R. Müller, M. Scholz, and G. Rätsch, "Kernel PCA and denoising in feature spaces," Advances in Neural Information Processing Systems 11, ed. M.S. Kearns, S.A. Solla, and D.A. Cohn, MIT Press, 1999.
- [5] H. Ogawa and E. Oja, "Projection filter, Wiener filter and Karhunen-loeve subspace in digital image restoration," J. Math. Anal. Appl., vol.114, no.1, pp.37–51, Feb. 1986.
- [6] B. Schölkopf, A. Smola, and K. Müller, "Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem," Neural Computation, vol.10, no.5, pp.1299–1319, 1998.
- [7] H.A. Smith, "Improvement of the resolution of a linear scanning device," SIAM J. Appl. Math., vol.14, no.1, pp.23–40, Jan. 1966.
- [8] D.C. Youla and H. Webb, "Image restoration by the method of convex projections, part 1-theory," IEEE Trans. Med. Imaging, vol.MI-1, no.2, pp.81–94, Oct. 1982.
- [9] 山下幸彦, 小川英光, "平均射影フィルタによる画像復元," 信学論 (D-II), vol.J74-D-II, no.2, pp.150–157, Feb. 1991.
- [10] 小川英光, "講座:信号と画像の復元," 電子情報通信学会誌, vol.71, no.5-8, pp.491–497, 593–601, 739–748, 828–835, May-Oct. 1988.
- [11] 小川英光, 原昌司, "部分射影フィルタによる画像復元," 信学論 (A), vol.J71-A, no.2, pp.519–526, Feb. 1988.
- [12] 杉山博史, 小川英光, "パラメトリック部分射影フィルタによる画像復元," 信学論 (D-II), vol.J72-D-II, no.10, pp.1618–1626, Feb. 1989.
- [13] 前田英作, 村瀬洋, "カーネル非線形部分空間法によるパターン認識," 信学論 (D-II), vol.J82-D-II, no.4, pp.600–612, April 1999.
- [14] 中村伸隆, 小川英光, "加法的ノイズを考慮した最適画像復元," 信学論 (D), vol.J67-D, no.5, pp.563–570, May 1984.
- [15] 津田宏治, "ヒルベルト空間における部分空間法," 信学論 (D-II), vol.J82-D-II, no.4, pp.592–599, April 1999.