

経験的モード分解における帯域幅制御 Bandwidth control in empirical mode decomposition

鷲沢 嘉一¹ 田中 聡久^{2,1} Danilo P. Mandic³ Andrzej Cichocki¹

¹ 理化学研究所 脳科学総合研究センター
{washizawa, cia}@brain.riken.jp

² 東京農工大学 大学院共生科学技術研究院システム情報科学部門
tanakat@cc.tuat.ac.jp

³ Imperial college, London. d.mandic@imperial.ac.uk

あらまし Huang らによって提案された経験的モード分解 (EMD; Empirical Mode Decomposition) は、信号を固有モード関数 (IMF; Intrinsic Mode Function) と呼ばれる狭帯域の信号の和に分解する手法である。IMF に Hilbert 変換を適用し、時間-周波数空間へ変換した信号は Hilbert-Huang スペクトラムと呼ばれ、瞬時周波数の解析に有効である。しかしながら、従来の EMD では、IMF の帯域幅や数を調整することが難しい。本論文では、EMD の過程で求める必要がある包絡線を最適化問題の解として表現し、少数の実数パラメータで IMF の帯域幅や数を制御する手法を提案する。

Abstract A flexible and efficient method for finding the envelope within the empirical mode decomposition (EMD) is introduced. Unlike the existing (deterministic) spline based strategy, the proposed envelope is a result of an optimisation process and sought as a minimum of a quadratic cost function. A closed form solution of this optimisation problem is obtained and it is shown that by choosing a small number of free parameters, we can fine-tune the frequency resolution or the number of intrinsic mode functions (IMFs) as well as the shape of the envelopes. Computer simulations on both the synthetic and real-world electro-encephalogram (EEG) data support the analysis.

1 はじめに

信号の周波数の時間変化を解析するためには、通常、短時間フーリエ変換 (STFT; Short time Fourier transform) やウェーブレット変換 (WT; Wavelet transform) 等の線形変換に基づく手法がよく用いられている。しかし、これらの手法は、時間分解能と周波数分解能がトレードオフであり、時間分解能を上げると周波数分解能が下がり、周波数分解能を上げると時間分解能が下がる。これは量子力学の不確定性原理を模し、Heisenberg box と呼ばれる [1]。

一方、非線形なアプローチとして Huang らは 1998 年に経験的モード分解 (EMD; Empirical mode decomposition) を提案した [2]。EMD は、信号 $x(n)$ を固有モード関数 (IMF; Intrinsic Mode Function) と呼ばれる狭帯域の信号 $c_i, i = 1, 2, \dots$ の和と残りの信号 $r(n)$ に分解する;

$$x(n) = \sum_{i=1}^N c_i(n) + r(n). \quad (1)$$

IMF に Hilbert 変換を適用することで、瞬時の周波数と振幅を求めることができ、時間-周波数空間の信号として表現できる [3]。すべての IMF を時間-周波数空間で表現した信号は Hilbert-Huang スペクトラムと呼ばれ、STFT やウェーブレットのスペクトラムに現れる不確定性を持たない。さらに EMD には、基底などの事前の知識を必要とせず、データを探索的に分析することができる特徴がある。EMD については、第 2 節で詳しく述べる。

EMD では、信号を IMF に分解する際に IMF の帯域幅や IMF の数を制御することが難しい。すなわち、所望の分解能で信号を分解することができない。これは IMF を求める際に信号の包絡線を極大値 (極小値) のスプライン曲線と定義していることに起因する。本論文

では、包絡線を 2 次最適化問題の解として定義し、その解を示す。この最適化問題の実数パラメータを調整することにより、IMF の帯域幅や数を制御する手法を提案する。これにより、例えば、信号中のノイズ比により分解能を変更したり、所望の周波数帯においてのみ細かい分解を行うなど、柔軟な分解を行うことができる。また、音声認識やパターン認識などの前処理として EMD を使う場合には、識別に最適な IMF を求めることもできる。パラメータと IMF の数や帯域幅の変化は人工的な信号と脳波計の信号を用いて例示する。

2 経験的モード分解

2.1 固有モード関数

EMD は時間信号を非線形に非定常な信号を時間-周波数空間に変換する手法である。始めに離散時間信号 $x(n)$ は、式 (1) のように IMF $c_i(n)$ と残りの信号 $r(n)$ に分解される。IMF が狭帯域の信号であるために、Huang らは IMF を下記の条件を満たす信号と定義している [2]。

- 信号の極値の数と信号がゼロと交差する回数が同じか 1 つの違いである。
- 信号の任意の点において、極大点と極小点から作られる包絡線の平均値がゼロである。

Huang らはこの条件を満たす信号が極狭帯域の信号であることを示した。AM, FM, AM-FM などの信号はすべて IMF である。

$x(n)$ から IMF は下記のように求めることができる。

1. IMF の添字集合 $I = \phi$ (空集合) とおく。
2. $(x - \sum_{i \in I} c_i)$ の極値がなくなるまで下記を繰り返す。

- (a) $h = x - \sum_{i \in \mathcal{I}} c_i$ とおく .
 (b) h が IMF になるまで下記を繰り返す .
- 極大値, 極小値を検出し, それぞれを三次のスプライン曲線で結び包絡線を求める . u, l をそれぞれの包絡線とする .
 - $h \leftarrow h - \frac{1}{2}(u + l)$ とする .
- (c) h を IMF の集合に加える .

IMF は高周波の成分から順に求まり, 最後に残った信号 $r(t)$ は最も低い周波数を持つ .

上記アルゴリズムの 2. (b) において, h が IMF かどうかの判定には下記の基準が用いられる .

$$SD = \sum_n \frac{|h_{\text{old}}(n) - h_{\text{new}}(n)|^2}{h_{\text{old}}^2(n)} \quad (2)$$

Huang らは SD が 0.2-0.3 で IMF とするのが経験的に最適であると述べている [2] .

2.2 Hilbert 変換

Boashash と Cohen は瞬時に於いて単一の周波数しか持たない信号 (monocomponent signal) に対し, Hilbert 変換を用いて振幅と位相を表現する手法を提案した [4], [5] . 単一の周波数を持つ信号 $x(t)$ に対し, Hilbert 変換 $y(t)$ は

$$y(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(t')}{t - t'} dt' \quad (3)$$

で定義される . ここで P は Cauchy の主値である . 複素信号 $z(t)$ を

$$z(t) = x(t) + iy(t) = a(t)e^{i\theta(t)} \quad (4)$$

とする . このとき, 振幅 $a(t)$ と位相 $\theta(t)$ は

$$a(t) = (x^2(t) + y^2(t))^{1/2} \quad (5)$$

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \quad (6)$$

で表され, 時刻 $t = t'$ における瞬時周波数 $\omega(t)$ は

$$\omega(t') = \left. \frac{d\theta(t)}{dt} \right|_{t=t'} \quad (7)$$

で表される .

IMF $c_i (i = 1, 2, \dots, N)$ に対応する振幅と瞬時周波数をそれぞれ a_i, ω_i とおくと

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^N c_i(t) + r(t) \\ &= \text{Re}\left[\sum_{i=1}^N a_i(t) \exp\left(i \int \omega_j(t) dt\right)\right] + r(t) \end{aligned} \quad (8)$$

と表される .

Hilbert-Huang スペクトラムは

$$H(t, \omega) = \begin{cases} a_i(t) & (\omega_i(t) = \omega) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (9)$$

と表される .

3 2次ペナルティによる包絡線の定義

EMD のアルゴリズムにおいて, IMF の帯域幅と数を変化可能にする新しい包絡線の定義を提案する . EMD のアルゴリズムでは, 収束するまで原信号から 2 つの包絡線の平均値を引く操作を繰り返す .

ここで, 包絡線に含まれる周波数を低く制限すれば IMF に高い周波数が多く残り, 1 つあたりの IMF の帯域幅が大きくなり, IMF の総数は減る . 逆に包絡線に含まれる周波数に制限を設けず, 式 (2) における SD の値も小さくすれば IMF の帯域幅は小さくなり, IMF の総数は増える . 即ち, 包絡線の周波数成分を制御することにより, IMF の周波数も制御することができると考えられる . そこで, 包絡線を下記のような性質を持つ信号と特徴付けることにする .

1. 極大値 (極小値) の近くをなるべく通る .
2. 滑らかである . 即ち周波数成分が低周波に大きく偏っている .

これらの条件を定式化することで, 包絡線推定を最適化問題を解くことに帰着させる .

分解する信号を $x(n)$ とし, 極大値, 極小値に対応する時間の集合をそれぞれ $\{t_i^u\}_{i=1}^{N_u}, \{t_i^l\}_{i=1}^{N_l}$ とする . 以下では, 極大値を用いて上側の包絡線 $u(n)$ を導くが, 下側の包絡線も同様に求めることができる . 極大値を並べたベクトル f_v を

$$f_v = [f(t_1^u) \ f(t_2^u) \ \dots \ f(t_{N_u}^u)]^T \quad (10)$$

とおき, $\{t_i^u\}_{i=1}^{N_u}$ を標本化する作用素を A とおく ($Ax = f_v$). $x(t)$ が離散信号のときは ($x(t) = x(n)$) A は極値に対応する時間 $(A)_{i,t_i^u} = 1$ で, それ以外は 0 となる $N_u \times T$ 行列となる . ここで T は $x(n)$ の点数である . e を \mathbb{R}^{N_u} の自然基底, \hat{e} を \mathbb{R}^T の自然基底と置くと,

$$A = \sum_{i=1}^{N_u} e_i \hat{e}_{t_i^u}^T \quad (11)$$

と表される . 上記の包絡線の条件 1 は, 評価基準

$$L_1(u) = \|Au - f_v\|^2 \quad (12)$$

を小さくすることで表現できる .

\mathcal{F} をフーリエ変換作用素とし, U を $u(n)$ のフーリエ変換とする . すなわち, 離散信号では

$$U(\xi) = (\mathcal{F}u)(\xi) = \sum_{n=0}^{N_u-1} u(n) \overline{\exp(i\xi n)} \quad (13)$$

であるとする . ここで上記の包絡線の条件 2 を以下の評価基準を用いて表現する .

$$L_2(u) = \sum_{i=1}^T U(\xi_i) \overline{LU(\xi_i)} = \langle U, LU \rangle \quad (14)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積を表し, ξ_i は i 番目の周波数帯を表す . 行列 L は対角行列で対角成分からなるベクトルを ρ とする .

$$L = \text{diag}(\rho) = \begin{bmatrix} \rho_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \rho_N \end{bmatrix} \quad (15)$$

周波数成分が低周波に偏るためには、高周波に対して大きなペナルティを課す必要があるので、 ρ は例えば以下のように与えられる。

$$1. \rho = (\underbrace{0 \dots 0}_n \underbrace{1 \dots 1}_{T-2n} \underbrace{0 \dots 0}_n)$$

$$2. \rho = (1^\alpha 2^\alpha \dots (T/2)^\alpha (T/2)^\alpha \dots 1^\alpha)$$

包絡線を求めるための最適化問題はペナルティ L_1, L_2 を同時に小さくすればよい。両者の重みを制御するパラメータを β とすると最適化問題は

$$\min_u J = \|Au - f_v\|^2 + \beta \langle U, LU \rangle \quad (16)$$

と表される。

(命題) この最適化問題の解は

$$u = (A^T A + \beta F L F)^{-1} A^T f_v \quad (17)$$

と表される。ここで $T \times T$ の逆行列の計算は、コストが非常に大きいですが、連立方程式 $(A^T A + \beta F L F)u = A^T f_v$ を Gauss 消去法で解くことにより、高速に最適解を求めることができる。

(証明)

$$J = \langle u, (A^T A + \beta F L F)u \rangle - \langle u, A^T f_v \rangle - \langle A^T f_v, u \rangle + \|f_v\|^2 \quad (18)$$

J を u で微分して

$$\frac{\partial J}{\partial u} = 2(A^T A + \beta F L F)u - 2A^T f_v \quad (19)$$

ここで $\beta > 0$ のとき $A^T A + \beta F L F$ は正則であるので、 $J = 0$ となるのは式 (17) のときである。(証明終)

4 実験

提案したアルゴリズムの有効性を示すために2つの実験結果を示す。1つ目の例では、単純な人工の信号を用いてパラメータと包絡線の関係を示す。2つ目の例では、脳波計の信号を用いて EMD の分解能と IMF の数の関係を示す。

インプリメントには MATLAB® を使い、従来法との比較のために公開されているソースコードを利用した [6], [7], [8]。

4.1 人工データの実験

包絡線とパラメータの関係を調べるために以下の人工的な信号を使用した。

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{40}t\right) \sin\left(\frac{2\pi}{400}t\right) \quad (20)$$

$x(t)$ は離散信号で $t = 1, \dots, 800$ とした。また、 $\beta = 10^{-8}$ 、 $\rho = (1^\alpha 2^\alpha \dots 400^\alpha 400^\alpha \dots 1^\alpha)^T$ として、 α を変化させた。

提案したアルゴリズムから求めた包絡線を図 1 に示す。図より、 α が大きくなるほど、即ち高周波のペナルティが大きくなるほど包絡線が滑らかになっていることが確認できる。また、2つの包絡線の平均線も α が小さいときには高周波成分を多く含み、 α が大きくなると高周波成分が小さくなるのが分かる。これにより、 α が小さいときには IMF から高周波がおおきく取り除かれ、周波数分解能が高くなり、IMF の数が多くなると考えられる。

4.2 脳波計データの実験

次に、提案したアルゴリズムを脳波計 (EEG; electroencephalogram) の信号に対して適用した例を示す。信号は Rutkowki による実験のデータを使用した [9]。信号はサンプリング周波数 2048Hz、量子化ビット 24bit のものを 204.8Hz ヘダウンサンプリングし、約 4.8 秒 (1000 サンプル) を使用した。 $\rho = (1^\alpha 2^\alpha \dots 500^\alpha 500^\alpha \dots 1^\alpha)^T$ とし、 $\alpha = 3$ および 5 の二種類について調べた。原信号と提案したアルゴリズムで求めた IMF、従来法で求めた IMF、それぞれの Hilbert-Huang スペクトラムをそれぞれ図 2, 3, 4, 5, 6 に示す。

実験結果より $\alpha = 3$ のとき IMF の数は 14、 $\alpha = 5$ のとき IMF の数は 9、従来法では 8 であった。これにより、提案法では、IMF の数が調整可能であることが確認できた。また、Hilbert-Huang スペクトラムについても α を小さくするとより細かなスペクトラムを描くことが確認できた。

5 まとめ

本研究では、EMD における IMF の周波数分解能と数を調整するために、包絡線を求める最適化問題を提示し、その解を求めた。この最適化問題のパラメータ ρ を変化させることにより IMF の周波数分解能や数を調整できることが、実験結果から確認できた。

実験では、IMF を求めるときに、 ρ におけるパラメータ α を 1 つに固定した。IMF を逐次求める際に α を変化させることにより、特定の周波数帯において分解能を変化させることができる。これにより、例えば脳波中のアルファ帯域の信号のみを精細に調べるなどの応用も可能になると考えられる。実験では、 α の値を大きくしすぎると IMF へと収束しない場合を観測した。ただし、スプライン補間を用いる従来法でも収束しない場合を観測できる。このため、今後の課題として、IMF への収束性の議論が挙げられる。

本研究は科学研究費補助金 (基盤研究 (B)) 18300057 の補助を受けた。

References

- [1] S. Mallat: "A wavelet four of signal processing", Academic press (1999).
- [2] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N.-C. Yen, C. C. Tung and H. H. Liu: "The empirical mode decomposition and the hilbert

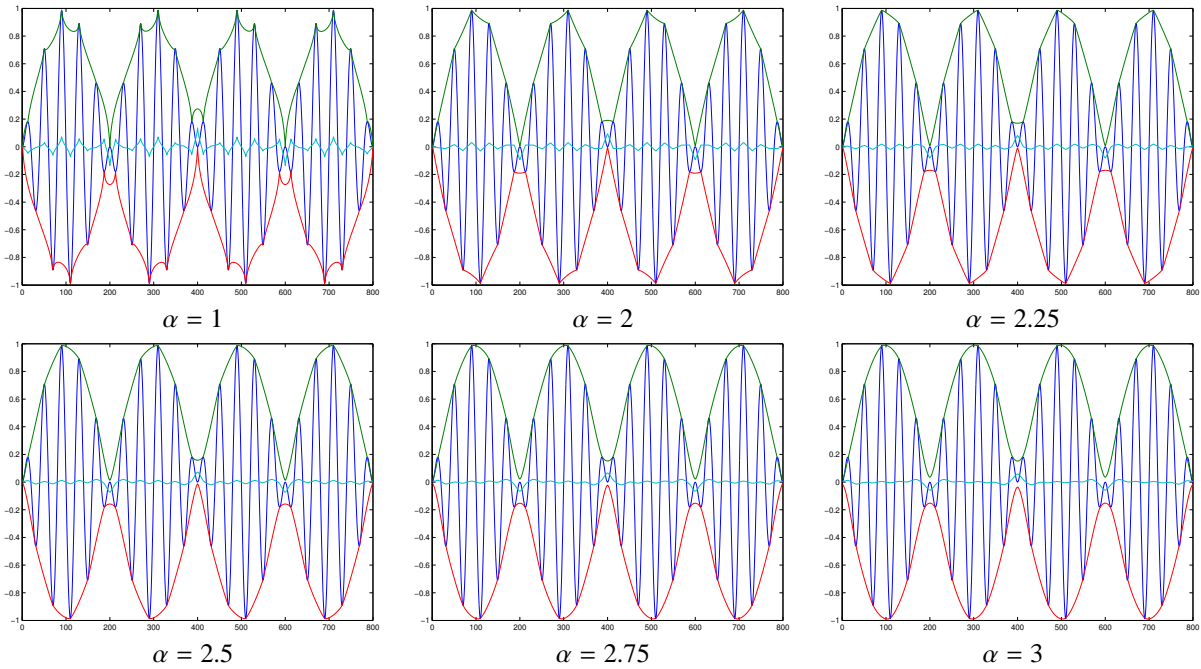


Figure 1: α と包絡線の関係

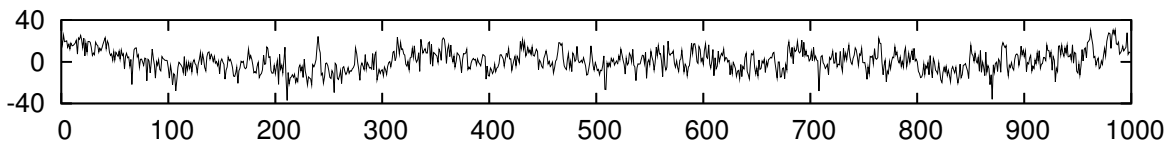


Figure 2: 脳波計データ

spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis”, Proceedings of the Royal Society of London, **A454**, pp. 903–995 (1998).

- [3] S. L. Hahn: “Hilbert transforms in signal processing”, Artech house (1996).
- [4] B. Boashash: “Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. I - Fundamentals. II - Algorithms and applications”, IEEE Proceedings, **80**, pp. 520–538 (1992).
- [5] L. Cohen: “Time-Frequency Analysis”, Englewood Cliffs, NJ: PrenticeHall (1995).
- [6] F. Auger, O. Lemoine, P. Gonçalves and P. Flandrin: “The time-frequency toolbox”, <http://tftb.nongnu.org/>.
- [7] G. Rilling, P. Flandrin and P. Gonçalves: “Matlab codes for EMD”, <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>.
- [8] M. Lambert, A. Engroff, M. Dyer and B. Byer: “Matlab codes for EMD”, <http://www.owlnet.rice.edu/elec301/Projects02/empiricalMode/code.html>.
- [9] T. M. Rutkowski, F. Vialatte, A. Cichocki, D. P. Mandic and A. K. Barros: “Auditory feedback for brain computer interface management an eeg data sonification approach”, Proc. of 10th International Conference on Knowledge-Based & Intelligent Information & Engineering Systems (KES2006) (2006).

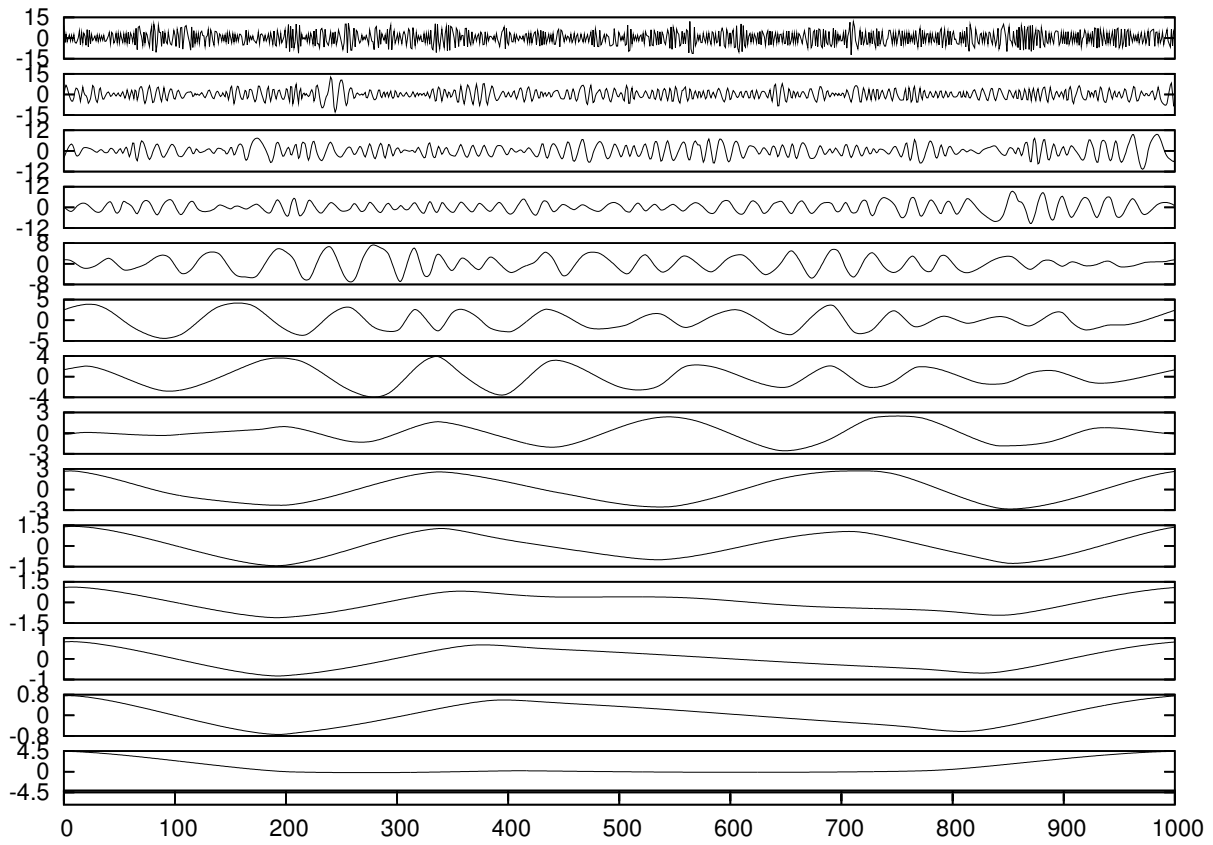


Figure 3: 脳波計データの IMF (提案法 $\alpha = 3$)

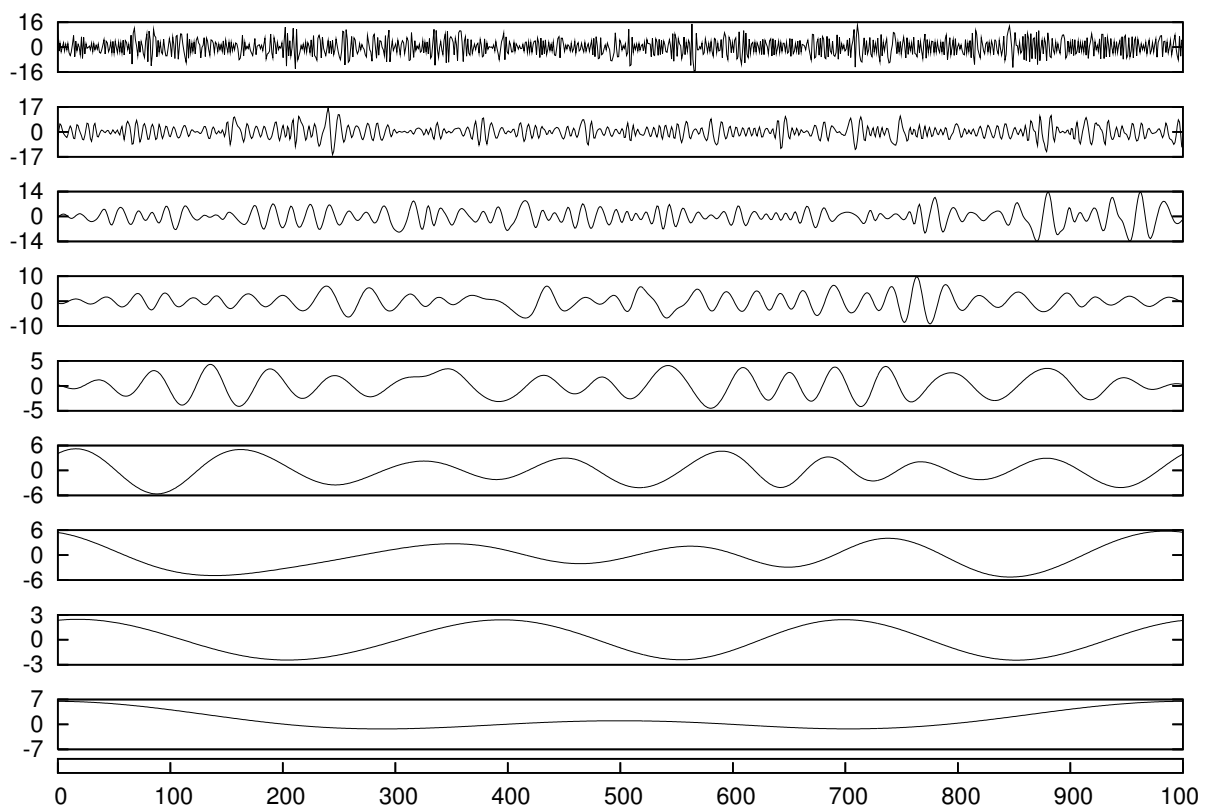


Figure 4: 脳波計データの IMF (提案法 $\alpha = 5$)

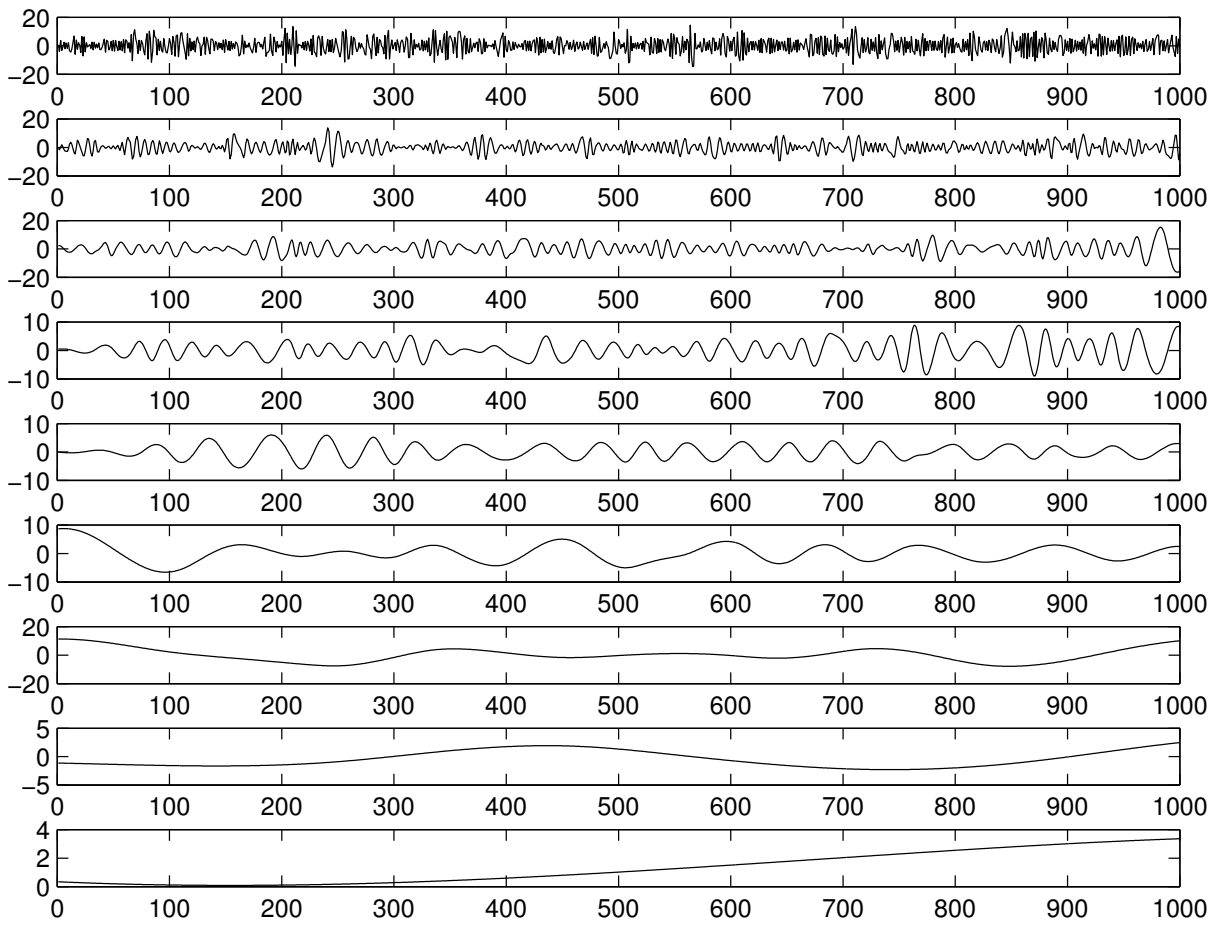


Figure 5: 脳波計データの IMF (従来法)

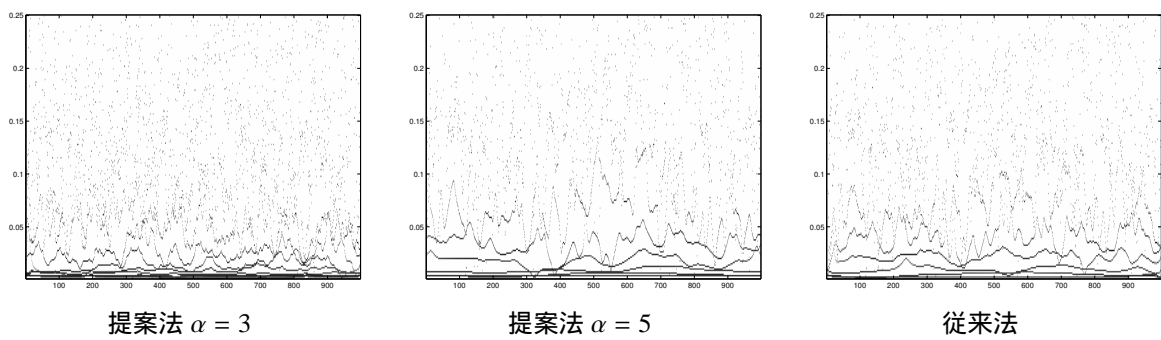


Figure 6: Hilbert-Huang スペクトラムの比較