山下研の常識

相対性理論入門 (Ver. 0.91)

山下幸彦
東京工業大学・大学院理工学研究科

内容：

- 目的
- 特殊相対性理論
- 線形座標変換
- 非線形座標変換
- Riemann多様体
- 一般相対性理論
- シュバルツ・シルト解

参考文献：藤井保憲，“時空と重力”, 産業図書, 1979.

1　目的

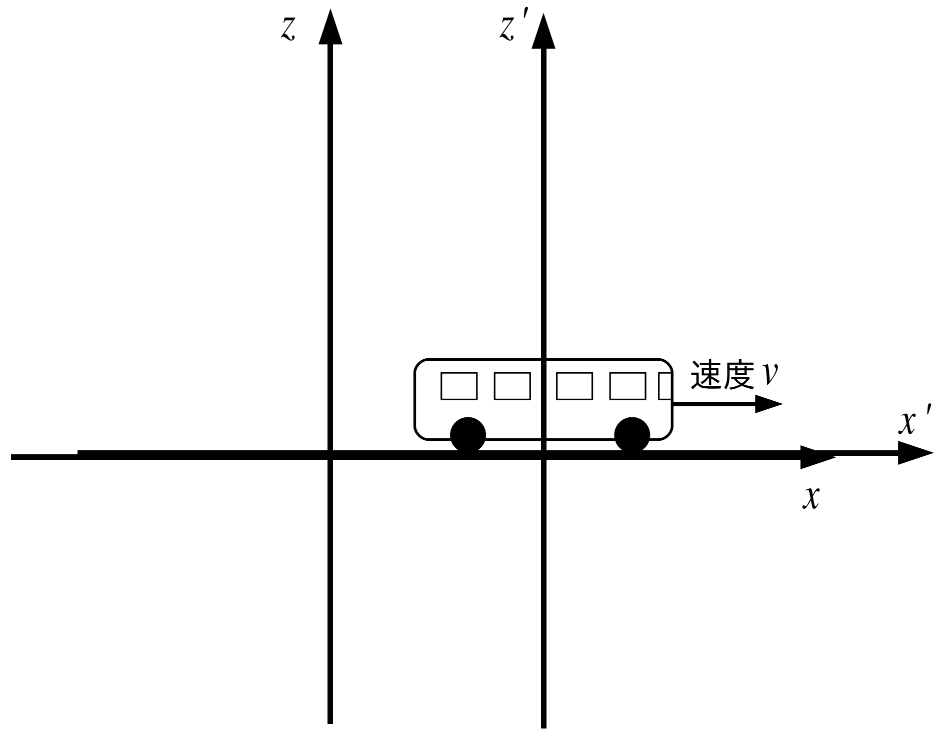
- アインシュタインによる奇蹟の年(1905年)から100年と少し
  - 特殊相対性理論
  - 光電効果(ノーベル賞)
  - ブラウン運動
- 情報系でも多様体を使う研究が盛んになっている：
  情報幾何学，(多様体上の正規分布，Mahalanobis計量)
- 一般相対性理論は，リーマン多様体を扱う例題として優れている。

注目されたところ

- ニュートン力学の場合：
  天体の運動と地上の運動を結びつけた。
  「なぜ，物は下に落ちるんだ？」
- **特殊相対性理論**の場合：
  時間の進み方が座標系のとり方によって異なる。
  $E = mc^2$

2　ガリレオ変換

- 2つの座標系 (x, y, z) と (x', y', z') を考える。
- 座標系 (x', y', z') は，座標系 (x, y, z) に対して速度 v で x 方向に進んでいて，$t = 0$ のときは両座標系は一致しているものとする。
- 例：
  - (x, y, z)：地上座標系
  - (x', y', z')：バスの中の座標系
  - バスは対地速度 v で x 方向に動いている。



両者の座標変換は，直観的にも，次のようになると考えられる。

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

常識的には，時間は両者で変らないと考えられる。

$$t' = t$$

地上で $x = 0$ で固定されているものは，バスから見れば，x' 軸方向に速度 $-v$ で (x' 軸のマイナス方向に速さ v で)，動いて見える。

- 以下，話を簡単にするために，y, z を無視する。
- 時間も含めてもう一度書けば，

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned}$$

　となる。この逆変換は，

$$\begin{aligned} x &= x' + vt' \\ t &= t' \end{aligned}$$

　となる。

- (x, t) から (x', t') という，2次元の変換を考えている。
- この座標変換をガリレオ変換と呼ぶ。
- ガリレオ変換は，ニュートン運動方程式を不変にする。

- ニュートンの運動方程式：
  - $x(t)$：時刻 t における質点の位置
  - F：力
  - 質量：$m = 1$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(t)$$

- これを座標変換する。
- 物体が受ける力の大きさは線形座標変換では変わらない。

$$F'(t') = F(t)$$

- 微分は，$t' = t$ であるので，常微分は変わらない。従って，$x(t) = x'(t') + vt'$ となり，次式が成立する。

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt'^2} = \frac{d^2(x'(t') + vt')}{dt'^2} = \frac{d^2x'(t')}{dt'^2}$$

- 座標変換しても，全く同じ形の運動方程式が得られる。

$$\frac{d^2x'(t')}{dt'^2} = F'(t')$$

- バスの中で$x'(t') = ut'$で進んでいる質点を，地上で止まってものから見るとどうなるか考える。

$$x(t) = x'(t') + vt = ut + vt = (u+v)t$$

- 上式より，地上で見た速さは，$u+v$になる。
  $\Rightarrow$ まあ，当たり前？
- しかし，これは変：
  - 実験では光速は座標系によらず一定である。
  - 波動方程式はガリレオ変換に対して不変でない。

波動方程式は，波の速度を1とすると，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = 0$$

となる。ガリレオ変換に対してその偏微分は変換公式から，

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = -v\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}$$

となる。$\varphi(t,x)=\varphi'(t',x')$として，波動方程式は，

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\varphi'-\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-2v\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'}+v^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)\varphi'=0$$

となる。この式から，波動方程式がガリレオ変換でに対して不変でないことが分かる。

注意：$t'=t$だから，

$$\frac{d}{dt'}=\frac{d}{dt}$$

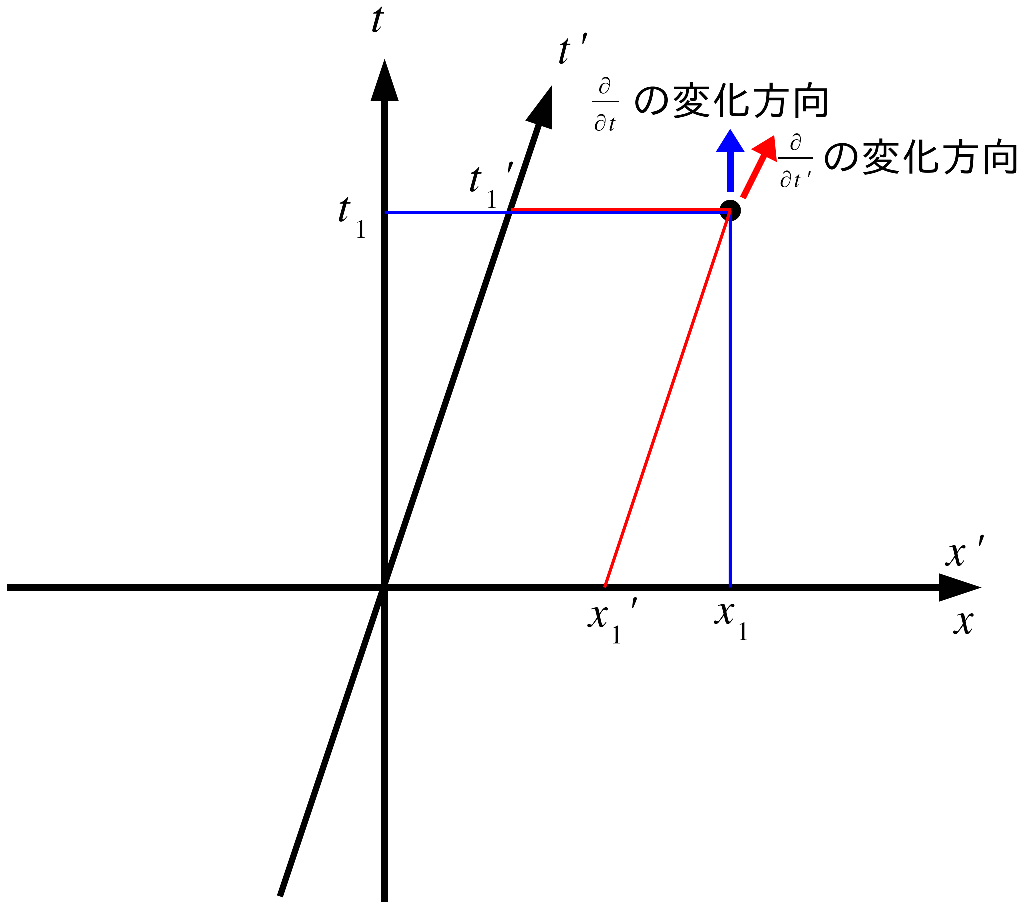
と言ったのに，

$$\frac{\partial}{\partial t'}\neq\frac{\partial}{\partial t}$$

だなんて，変微分？

■ 偏微分の場合，$t'=t$でも$x'\neq x$ならば，t'とtの偏微分は異なる。
(次ページの図参照)

- これは，tの偏微分はxを固定したときの変化を表すが，t'の偏微分はx'を固定したときのt'による変化を表わすためである。
- 右図は，ガリレオ変換の座標変化を図で表わしたものである。
- 青い矢印方向が，$\frac{\partial}{\partial t}$の変化方向を表す。
- 赤い矢印方向が，$\frac{\partial}{\partial t'}$の変化方向を表す。
- $t = t'$なのにt'の座標軸が傾いているのはおかしな気がするが，これは，t軸は$x = 0$によってt'軸は$x' = 0$によって表わされるためである。



- 常微分を考えるときは，扱うものがtだけの関数なので，$t = t'$ならば両者の常微分は等しい。

- 話を波動方程式に戻して，何でこんなことが生じるのか？
  $\Leftarrow$ 波動方程式は何か媒体(弦，気体，液体，固体)の存在を仮定して作られているためである。
- このようなものを総称して「エーテル」と呼ぶ。
- 動いている座標系では，エーテルに対して相対速度を持つため，方程式が不変でなくなる。
- 空気の流れが違うため，走っているバスの屋根の上の座標系と地上の座標系で音の波動方程式が異っていても，不思議ではない。
- ニュートンの運動方程式にはエーテルのようなものは不用だった。

しかしながら，光の速度は一定であり，動いている座標系でも同じ方程式が成立する必要がある。すなわち，

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\varphi' - \frac{\partial^2}{\partial t'^2}\varphi' = 0$$

が成立する必要がある。

3　ローレンツ変換

- 線形変換の範囲で波動方程式を不変にするものを探す。
- a, b, c, d を定数として,

$$
\begin{aligned}
x' &= ax + bt \\
t' &= cx + dt
\end{aligned}
$$

  を仮定して，方程式を不変にするものを探せば良い。
- 座標変換に対する偏微分の変換を計算して代入すれば，波動方程式を不変にする変換が求まる。
- 光速を1として，その一般形を書くと次のようになる。

$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - vt) \\
t' &= \gamma(-vx + t) \\
\gamma &= 1/\sqrt{1 - v^2}
\end{aligned}
$$

- $x' = 0$ を代入すると $x = vt$ となるので，t', x' 座標系は t, x から見ると，速度 v で x 軸方向に動いてる。
- 単位を考えると一見 $-vx$ の項がおかしな気がするが，これは光速と1としているためで，光速を c とすれば $-vx/c^2$ となる。

- y, zを省略しているが，x方向にだけ運動しているため，$y' = y$，$z' = z$が成立する。
- 光速を1としているので，普通は$v << 1$ということになる。
  ⇒ この場合は，ガリレオ変換に近似される。
- 逆変換は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
x &= \gamma(x' + vt') \\
t &= \gamma(vx' + t')
\end{aligned}
$$

これは，vを$-v$としたものに等しい。

- この変換を**ローレンツ変換**と呼ぶ。
- ある時空の座標変換が波動方程式が不変とするならば，それはローレンツ変換である必要がある。
- ローレンツ変換は，アインシュタインの前から知られていた。
- しかし，だれも物理的な時間が本当に違っているなんて考えもしないことだった。

3.1 速度の和

- バス上で速度uで等速運動している質点があるとする。その座標$x'(t')$は，次式で表される。

$$x'(t') = ut'$$

- その点の地上における座標を$x(t)$とする。

$$x(t) = \gamma(x'(t') + vt') = \gamma(ut' + vt') = \gamma^2(u + v)(-vx(t) + t)$$

より，次式が成立する。

$$x(t) = \frac{u + v}{1 + uv}t$$

- すなわち，地上からは速度$\frac{u+v}{1+uv}$で動くように見える。u，vが0に近ければ，この速度は$u + v$と普通の加算になる。
- $-1 < u < 1$，$-1 < v < 1$ならば，$-1 < \frac{u+v}{1+uv} < 1$が成立する。この式は，光速以下のものを合わせても光速を越えることができないことを示している。
- $u = 1$とする。これは，バスの中の光の速さを考えていることになる。地上で見たときの速さは，$\frac{u+v}{1+uv} = \frac{1+v}{1+v} = 1$となり光速のままである。

4　ローレンツ変換の性質

- (x, t)軸による直交座標系を考える。
- 時間が経過するため，対象とする1つの点は下から上への線で表される。

  $x = \mathrm{const}$の垂直線は，(x, t)座標系で静止しているものを表す。

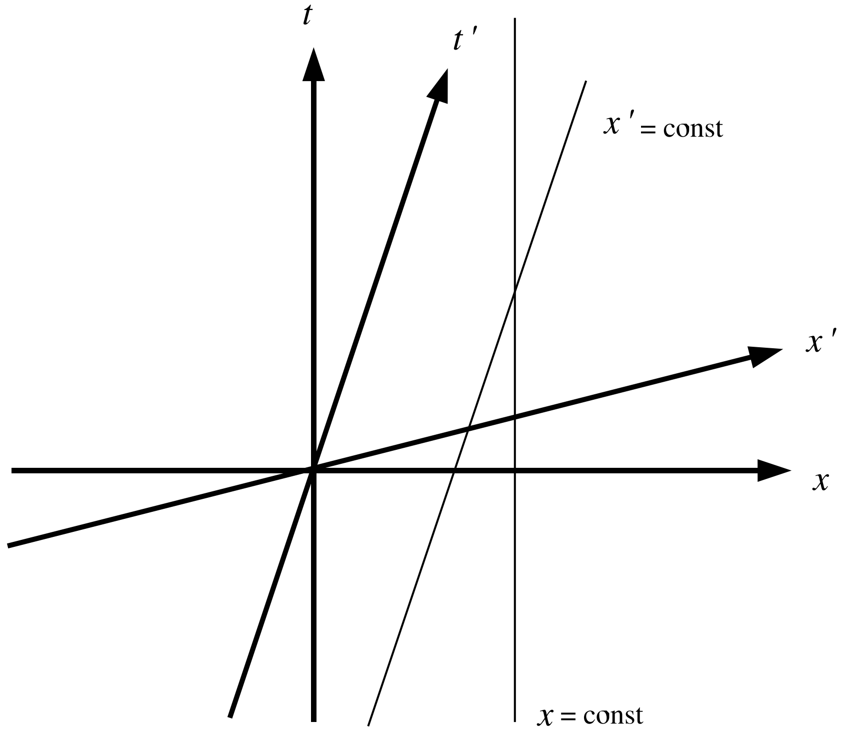
  $t = \mathrm{const}$の水平線は，この座標系において時刻が同じ点の集まりである。
- この座標系に，$x' = \mathrm{const}$，$t' = \mathrm{const}$の直線を考える。

  $x' = 0$がt'の座標軸になる。

  $\rightarrow x - vt = 0$

  $t' = 0$がx'の座標軸になる。

  $\rightarrow t - vx = 0$



$\Rightarrow$図から分かるように，これは直交座標系ではない。

- この座標系で変換の性質を考えていく。

4.1　時間の伸び縮み

- 地上の $x = 0$ と $x = 1$ に同期している時計があるものとする。
- バスの座標系の $x' = 0$ に静止している人(A さん)がいるものとする。
- A さんは，$x = 0$ と $x = 1$ に来たときに，地上のそれぞれの時計を見るものとする。
- A さんは自身も時計を持っているとする。
- A さんが地上の $x = 0$ の時計を見たときが，$t' = t = 0$ であるとする。ローレンツ変換を使うので，2つの座標系の原点を一致させる必要がある。(ローレンツ変換に平行移動を組み込むこともできるが)

- A さんの地上の座標 x とバス上の座標 x' をそれぞれの時間の関数とし，$x(t)$ と $x'(t')$ で表す。
  - バスの地上に対する速度が v なので $x(t) = vt$ となる。
  - バスの中では A さんは $x' = 0$ で止まっているので，任意の t' に対して，$x'(t') = 0$ となる。
- 両者は同じ時空の点を表しているので，ローレンツ変換で変換される。

- Aさんが$x = 1$に到着したときの地上の時計の時刻t_1は，$x(t) = vt$より，

$$t_1 = 1/v$$

となる。その時のバスの時計の時刻t'_1は，ローレンツ変換の1番目の式

$$1 = x(t_1) = \gamma(x'(t'_1) + vt'_1)$$

より，以下のようになる。

$$t'_1 = 1/(v\gamma) = \sqrt{1-v^2}/v < t_1$$

- バス上の時間が地上よりも遅れていることがわかる。
- **もう少し形式的に解いてみる。** Aさんが$x = 1$に着いたときの位置と時刻は，$(x, t) = (1, t_1)$と$(x', t') = (0, t'_1)$で表すことができる。
- この2つの座標系による座標値は，時空において同じ点を表すため，ローレンツ変換で結びつく。
- 従って，ローレンツ変換

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma(-vx + t) \end{aligned}$$

において，未知数を $t = t_1$，$t' = t'_1$ とし，$x' = 0$，$x = 1$ として得られる式,

$$
\begin{aligned}
0' &= \gamma(1 - vt_1) \\
t'_1 &= \gamma(-v + t_1)
\end{aligned}
$$

を解けば良いことになる。

- 逆の状況を考える。
- バスの座標系の $x' = -1$ と $x' = 0$ に時計があって，地上のBさん $(x = 0)$ が，それらの時計がBさんのところに来たときに，時刻 (t' の値) を読み取り，時刻の差を計算する。
- $x' = 0$ の時計がBさんのところに来る時空の点は，両座標系の原点である ($t = t' = 0$，$x = x' = 0$)。
- $x' = -1$ の時計がBさんのところに来る時刻を，それぞれの座標系で，t_2 と t'_2 とする。
- 従って，$(x, t) = (0, t_2)$ と $(x', t') = (-1, t'_2)$ が，同じ時空の点を表していることになる。

- それらの座標値をローレンツ変換の式に代入して

$$
\begin{aligned}
-1 &= \gamma(0 - vt_2) \\
t_2' &= \gamma(-v \cdot 0 + t_2)
\end{aligned}
$$

が得らる。
- これを解くと,

$$
\begin{aligned}
t_2 &= 1/(v\gamma) = \sqrt{1 - v^2}/v \\
t_2' &= 1/v
\end{aligned}
$$

となる。従って，次式が成立する。

$$
t_2 < t_2'
$$

- 地上の方が，経過した時間が少ない。
今度は地上の方が時間が経つのが遅くなっている。

- 超高速宇宙旅行から行って帰って，歳を取っているのはどっち???

- 特殊相対性理論では加減速を扱えないため，次のように**逆向きの方向で進む2台のバス**を考える。
  - 速度vのバスに乗っているCさんは，$x = 0$を通過し，$x = 1$で速度$-v$のバスのDさんとすれ違うとする。
  - すれ違いざまにCさんはDさんに，$x = 0$から$x = 1$までかかった時間(t'_1)を伝える。
  - Dさんは，速度がマイナスなので，$x = 1$から$x = 0$へ向かうが，その間の時間を計る。
  - その2つを加えた時間と，地上の人がCさんが$x = 0$を通過してから，Dさんが$x = 0$を通過するまでの時間を比べる。
- これで，往復の時間を差を評価することができる。

人間を受け渡せるわけではないが，すれ違いざまに情報を伝達することによって，トータルで情報処理ができる時間を求める問題に対しては，この仮定が適用できる。

- 座標系を次のように取る。

  (x, y)：地上の座標系

  (x', y')：速度vの座標系

  (x'', y'')：速度$-v$の座標系
- それぞれの座標系はローレンツ変換により,

$$\begin{cases} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma(-vx + t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' &= \gamma(x + vt) \\ t'' &= \gamma(vx + t) \end{cases}$$

  の関係を持つ(3つの座標系の原点は一致している)。
- Cさんは, $x' = 0$にいるものとする。
- Dさんは, $x'' = d$にいるものとする(dは方程式から求める)。
- Cさんは, $t = 0$のときに$x = 0$を通過するものする。その時空の点では$(x, t) = (x', t') = (x'', t'') = (0, 0)$が成立している。
- CさんとDさんが$x = 1$ですれ違う時空の点を,

  $(x, t) = (1, t_1)$, $(x', t') = (0, t'_1)$, $(x'', t'') = (d, t''_1)$とする。

- Dさんが$x=0$を通過する時空の点を，
  $(x,t)=(0,t_2)$，$(x',t')=(x_2,t'_2)$，$(x'',t'')=(d,t''_2)$とする。
- 座標系が異なるが同じ時空を表す場合，ローレンツ変換で結びつく。
- ただし，変数の中で(x'_2,t'_2)は求める必要がないので，それらのローレンツ変換の中の，

$$\text{CとDがすれ違うとき：}\quad \begin{cases} 0 &= \gamma(1-vt_1) \\ t'_1 &= \gamma(-v+t_1) \end{cases}$$

$$\text{CとDがすれ違うとき：}\quad \begin{cases} d &= \gamma(1+vt_1) \\ t''_1 &= \gamma(v+t_1) \end{cases}$$

$$\text{Dが}x=0\text{の到着するとき：}\quad \begin{cases} d &= \gamma(0+vt_2) \\ t''_2 &= \gamma(v\cdot 0+t_2) \end{cases}$$

  を方程式として解けば良い。未知数は，t_1，t'_1，t''_1，t_2，t''_2，dの6つで，方程式の数と一致し解くことができる。
- これを解くと，地上で経過した時間は$t_2=2/v$で，往復の時間の和は$t'_1+(t''_2-t''_1)=2\sqrt{1-v^2}/v$となる。やはり，往復の和の方が小さくり，ロケットの中の人の方が歳を取らないことになる。

4.2　ローレンツ収縮

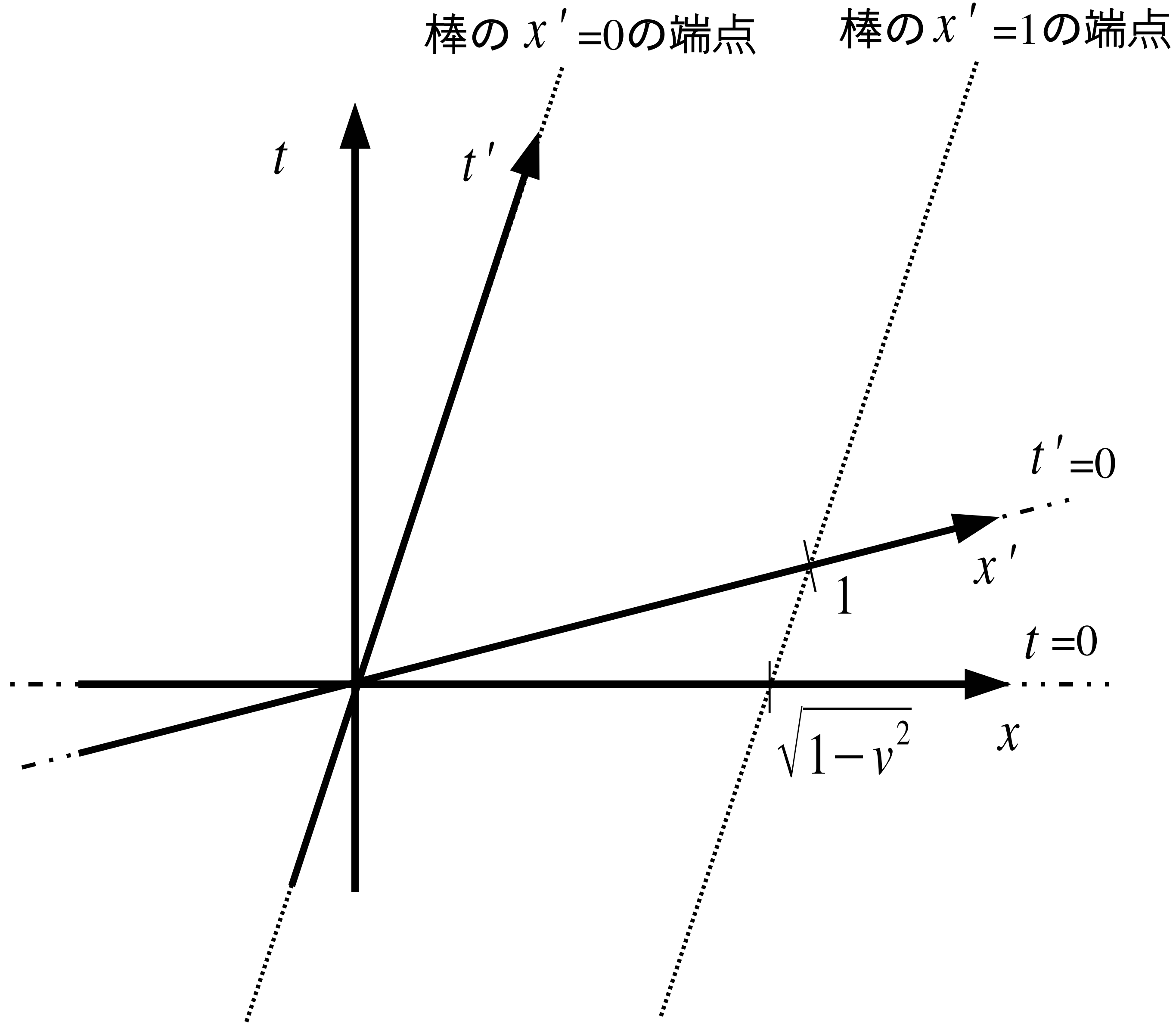
ローレンツ収縮：動いているものは，本当の長さより短く見える。

- 長さ＝同時刻における2点の座標値の差
  各座標系の空間成分(いまの場合はx)が長さを基準に定義されている。
- 座標系により同時刻が変わるため，長さが座標系によって変わる。

⇒ 物体の本当の長さは，固有時の同時刻(物体といっしょに動く座標系の同時刻)によって決める。

ローレンツ収縮は次のようにして求めることができる。

- 長さ1の棒がバスの中にあるものとする。
- この状況では，t'によらず，$x' = 0$から$x' = 1$までが棒になっている。
- 地上では$t = 0$のとき長さを計ることにする。
- 座標系の原点が一致しているので，棒の$x' = 0$の端点は$t = 0$では$x = 0$として観測される。
- 棒の$x' = 1$の端点は$t = 0$で，$x = x_1$として観測されるとする。
  このときのバスにおける時刻をt'_1とする。
- このx_1が地上で観測される棒の長さになる。



ローレンツ収縮

- $(x,t) = (x_1, 0)$ と $(x', t') = (1, t'_1)$ はローレンツ変換で結び付いていることになるので,

$$
\begin{aligned}
1 &= \gamma(x_1 - v \cdot 0) \\
t'_1 &= \gamma(-v x_1 + 0)
\end{aligned}
$$

が成立する。
- 従って，$x_1 = \sqrt{1 - v^2}$ となり，地上で観測した方が短く見え，ローレンツ収縮が生じる。
- $t'_1 = -v$ となる。
  地上で $t = 0$ のときに両端を観測することは，バス上の時間では, $x' = 0$ を $t' = 0$，$x' = 1$ を $t' = -v$ の時に観測することになる。

- $t = 0$ とすると，$x = \sqrt{1 - v^2} x'$ が成立している (t' は一般には0でない)。

5　線形座標変換

一般の線形座標変換を考えていく。

2 次元の場合

- (x_1, x_2) と (y_1, y_2) という 2 つの座標系があるものとする。
- 2 つの間に次の座標変換が成立するとする。

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2
\end{aligned}
$$

- 座標系が2つあるだけであるから，同じ点を2の方法で表わしていると考えていることになる。
- 行列

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}
$$

は可逆であるとして，$B = A^{-1}$ とすれば，次式が成立する。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\
x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2
\end{aligned}
$$

- (x_1, x_2)の近傍の点(x_1+dx_1, x_2+dx_2)が，(y_1, y_2)座標系で(y_1+dy_1, y_2+dy_2)で表されるとする。((x_1+dx_1, x_2+dx_2)と(y_1+dy_1, y_2+dy_2)が同じ点を表している。) このとき，次式が成立する。

$$\begin{aligned} dy_1 &= a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 \\ dy_2 &= a_{21}dx_1 + a_{22}dx_2 \end{aligned}$$

- また，明らかに次式が成立する。

$$\begin{aligned} dx_1 &= b_{11}dy_1 + b_{12}dy_2 \\ dx_2 &= b_{21}dy_1 + b_{22}dy_2 \end{aligned}$$

- また，偏微分の変換は，次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_2} = b_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + b_{21}\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} &= \frac{\partial x_1}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial x_2} = b_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} + b_{22}\frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

- 上式をまとめて，ベクトルと行列で表せば，次のようになる。

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

- $\{dx_1, dx_2\}$や$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right\}$をベクトルの基底と考えることにする。

  $\Rightarrow$ スカラーα_1，α_2，ξ_1，ξ_2に対して，次のものがベクトルになる。

$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2$$

  (ここでは，スカラーは実数とする。)

  – 例えば，ベクトルの加算は以下のようになる。

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \left(\beta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = (\alpha_1 + \beta_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$(\xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2) + (\eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2) = (\xi_1 + \eta_1)dx_1 + (\xi_2 + \eta_2)dx_2$$

- 2種類のベクトルは，異なる空間に属していると考える。
  前者を接ベクトル，後者を余接ベクトルと呼ぶ。
- 上のように演算を定義すれば，2つの空間が，ベクトル空間の公理を満たしていることは簡単にわかる。
- この例では，両者とも2次元空間である。
- この2つの空間に，自然な内積は定義されない。
  (後に，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を使って定義する。)

5.1 接ベクトルの変換

- $f(x_1, x_2)$，$g(y_1, y_2)$ を同じ関数とする。
  これは，同じ位置では同じ値をとることを意味する。
- すなわち，(x_1, x_2) と (y_1, y_2) が同じ点を表す場合は，

$$f(x_1, x_2) = g(y_1, y_2)$$

が成立する。従って，次式が成立する。

$$\begin{aligned} g(a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2) &= f(x_1, x_2) \\ g(y_1, y_2) &= f(b_{11}y_1 + b_{12}y_2,\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2) \end{aligned}$$

- 座標系が異なる場合，同じ点における接ベクトルによる関数の偏微分は，接ベクトルの係数が同じでも等しくない。

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) g(y_1, y_2) \neq \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) f(x_1, x_2)$$

- 例を示す。２つの座標系の座標変換を,

$$y_1 = 2x_1$$
$$y_2 = x_2$$

とする，$f(x_1, x_2) = x_1^2$とすると，$g(y_1, x_2) = y_1^2/4$でなくてはいけない。$\alpha_1 = 1$，$\alpha_2 = 0$とすれば,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1$$
$$\frac{\partial g}{\partial y_1} = y_1/2 = x_1$$

となり，両者は等しくない。

- 従って,

$$\left(\beta_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) g(y_1, y_2) = \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) f(x_1, x_2)$$

となるように，β_1，β_2を決める必要がある。

- **演習** β_1，β_2を求めよ。
  $f(x_1, x_2) = g(y_1, y_2)$と，式(2)から計算できる。

- 答えは次の通りである。

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

- 記号を簡略化する。
- xで(x_1, x_2)座標を，yで(y_1, y_2)座標を表すものとする。
- また，同じ場所で同じ値を取る関数の記号を変えるのは面倒である。
  $\Rightarrow g(y)$の代わりに$f(y)$と書く。
- $f(y)$は，(y_1, y_2)座標を(x_1, x_2)座標に変換し，それを$f(x)$に代入したものである。
  $f(x_1, x_2)$に(y_1, y_2)の座標値を代入した$f(y_1, y_2)$で はない。

- 例を示す。座標変換は先と同じで,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2x_1 \\
y_2 &= x_2
\end{aligned}
$$

とする。また，関数を

$$
f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2
$$

とするとき，$f(y)$は，$y_1^2/4$であって，y_1^2ではない。

- 接ベクトル$\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$は，$\alpha_1$，$\alpha_2$を変えることによって，関数の様々な方向の偏微分を求めるものとして理解できる。

5.2　余接ベクトルの変換

- では，$\{dx_1, dx_2\}$を基底とする余接ベクトル空間は何を意味するか？
- 抽象的には，$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right\}$が張る空間における双対空間として定義されている。
- 双対空間とは，あるベクトル空間の線形汎関数の全体からなる集合を意味する。
- 汎関数とは，ベクトル空間からスカラー全体への写像のことである。
- 線形汎関数hとは，汎関数であり，任意のベクトルu，vと，任意のスカラーα，βに対して，次式を満たすものである。

$$h(\alpha u + \beta v) = \alpha h(u) + \beta h(v)$$

- ある固定点(p_1, p_2)の近傍の点$(x_1, x_2) = (p_1 + dx_1, p_2 + dx_2)$を考える。すると，$(dx_1, dx_2) = (x_1 - p_1, x_2 - p_2)$となる。このとき，$dx_i\ (i = 1, 2)$は位置$(x_1, x_2)$の関数と考えられる。
- dx_iを微分すれば，次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x_j} dx_i = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i - p_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

- この関係を使えば，次式が成立する。

$$\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(\xi_1 dx_1+\xi dx_2)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2 \tag{3}$$

  となる。
- 余接ベクトル$h=(\xi_1 dx_1+\xi dx_2)$に対して，

$$h\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\equiv\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(\xi_1 dx_1+\xi dx_2)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2$$

  と定義すれば，余接ベクトルは接ベクトル空間の汎関数となっている。
- **演習**：hが接ベクトル空間に対する線形汎関数になっていることを示しなさい。
- それぞれのベクトル空間に自然な内積を定義することはできなかったが，両者の演算は自然に定義できた。
- 逆に，接ベクトル空間は，余接ベクトル空間の双対空間となる。(式(3)の形から明らかと思う。)
- 余接ベクトルを直観的に考えて見る。$f(x_1,x_2)$の全微分は以下の通り

である。

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$$

- これは,

$$\xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2$$

という形である。
⇒ 余接ベクトルは，座標の微小変化に対する1次近似としての関数の増減を表わしている。
- 接ベクトルは，関数の増減を調べる方向と倍率を表わしている。
- **演習**：余接ベクトルの変換則を求めよ。
ヒント：式(1)と,

$$\eta_1 dy_1 + \eta_2 dy_2 = \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2$$

から，ξ_i，η_i $(i = 1, 2)$の関係を求めれば良い。
答えは以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

- **演習**：余接ベクトルと接ベクトルの線形汎関数の値は，座標変換に対して不変であることを示せ。
ヒント：不変とは,
$$\beta_1\eta_1 + \beta_2\eta_2 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$$
のこと。変換式を代入すれば，行列BとAの積が出てきて不変になる。
- **演習**：接ベクトルと余接ベクトルを図示せよ。
  - 一般に，座標軸x_1は直線$x_2 = 0$の上にあり，座標軸x_2は直線$x_1 = 0$の上にある。
  - また，$\frac{\partial}{\partial x_1}$は，$x_2$を固定して$x_1$を変化させ，関数の変化を調べることを意味しているので，x_1座標軸の方向と一致して書くことができる($\frac{\partial}{\partial x_2}$についても同様)。
  - 接ベクトルと余接ベクトルは別の空間に存在するので，同じ座標系にプロットすることに意味がないようにも見える。ただ，双対空間の線形汎関数はもとの空間のベクトルとの内積で表すことができる。すなわち，線形汎関数hと任意のベクトルxに対して,
$$h(x) = \langle w, x \rangle$$

となるベクトルwが存在する。(x_1, x_2)においてユークリッド内積を考えれば，接ベクトルと余接ベクトルを関係づけることもできる。

– 余接ベクトルに関して考える。

$$\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 = 1 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} dx_1 = 0 \quad (5)$$

が成立する。従って，線形汎関数を内積を使って表すことによって，接ベクトルと余接ベクトルを同じ空間に書くとすれば，dx_1は$\frac{\partial}{\partial x_2}$と直交し，$\frac{\partial}{\partial x_1}$との内積が1となる必要がある($dx_2$についても同様)。一般に，このような関係を持つ基底を双直交基底と呼ぶ。

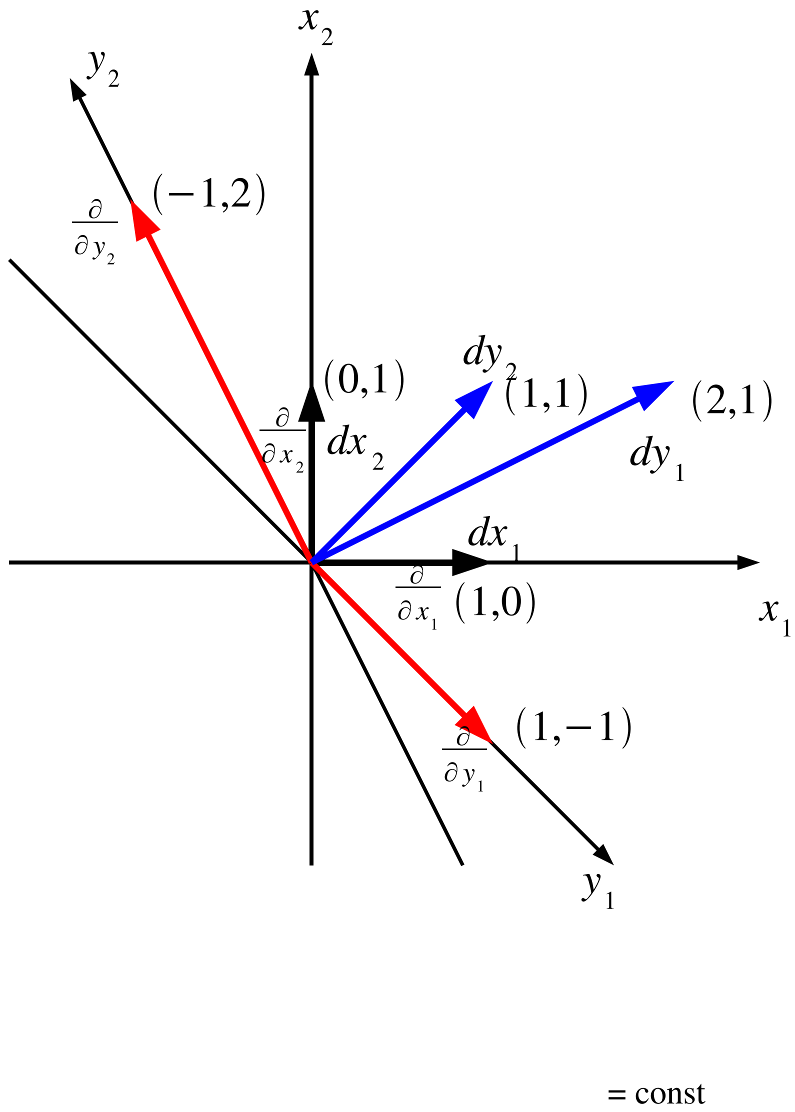
- まず，(x_1, x_2)を通常の直交座標系として考えていく。
- (y_1, y_2)座標系が(x_1, x_2)座標系から，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で変換して得られるとする。

- 先の条件より，接ベクトル $\frac{\partial}{\partial x_1}$ と余接ベクトル dx_1 が $(1,0)$ というベクトルで，接ベクトル $\frac{\partial}{\partial x_2}$ と余接ベクトル dx_2 が $(0,1)$ というベクトルで表わすことができきる。
- (y_1, y_2) 座標の座標軸を，(x_1, x_2) の直交座標系上に書け
- また，(y_1, y_2) の接ベクトルの基底 $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}$ と余接ベクトルの基底 $\{dy_1, dy_2\}$ も，(x_1, x_2) の直交座標系上に書け。
- 答は次ページ

- y_1，y_2 座標系は，y_1 座標軸が $y_2 = 0$ で，y_2 座標軸が $y_1 = 0$ で与えられることを考えれば分かる。
- $dx_1 = (1,0)$，$dx_2 = (1,0)$，$\dfrac{\partial}{\partial x_1} = (1,0)$，$\dfrac{\partial}{\partial x_2} = (0,1)$ として，p.21 の変換則を使えば答えが出る。
- (y_1, y_2) 座標系においても，接ベクトルは座標軸の方向と一致し，dy_1 は $\dfrac{\partial}{\partial y_2}$ と直交し，$\dfrac{\partial}{\partial y_1}$ との内積が 1 となることがわかる。



繰り返すが。

- 接ベクトルと余接ベクトルは異なる空間に属する。
  先の問題の図は基準となる座標系と基底ベクトルを決めて，同一視している。
- また，接ベクトルと余接ベクトル
  $$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$
  $$\xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2$$
  自体は座標変換に依存せず，一定である。
- 依存しないように，α_i，ξ_i の変換則が決まっていると考えることができる。

経路上の接ベクトル

- 経路 $(x_1(t), x_2(t))$ に沿った，関数 $f(x_1, x_2)$ に対する微分は，

$$\frac{d}{dt}f(x_1(t), x_2(t)) = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) f$$

となる。
経路を決めれば，経路上の接ベクトル

$$\frac{dx_1(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

が決まる。

5.3　測度

- 測度とは，(部分)集合から実数への写像のことである。
- 物理的には，長さ，面積，体積などが測度である。
  それぞれ，ある線分という点の集合，面という点の集合，立体という点の集合から実数への写像になっている。
- これらは，積分の定義に欠かすことができない。
- 例えば，2次元の積分は，定義域の面を細かい面積要素に区切って，その面積と関数の値をかけて足し合わせたもの(Riemann積分)である。
- 線形座標変換を行なっても，積分は不変になるようにする。
- (x_1, x_2)を基準となる直交座標として，座標変換したときには，積分が適当な関数J_yによって，以下のように書けるものとする。

$$\int\int f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int\int g(y_1, y_2)J_y dy_1dy_2$$

- 関数自体の方は同じ場所で同じ値なので心配する必要はない。
- dx_1dx_2とdy_1dy_2が異なる。

- この式では，面積(測度)の基準が(x_1, x_2)側にある。すなわち，4点(x_1, x_2), $(x_1 + dx_1, x_2)$，$(x_1, x_2 + dx_2)$，$(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$からなる長方形の面積が，dx_1dx_2であるものとする。
- 従って，dx_1dx_2の代わりに，4点(y_1y_2)，$(y_1 + dy_1, y_2)$，$(y_1, y_2 + dy_2)$, $(y_1 + dy_1, y_2 + dy_2)$ からなる長方形を(x_1, x_2)座標系に戻したときの面積を使えば良いわけである。
- これは簡単に計算できて,

$$\det(B^T)dy_1dy_2$$

となる。従って，$J_y = \det(B^T) = \det(B) = \det(A)^{-1}$とすれば良いことになる。
- (x_1, x_2)座標系の場合も含めるために，$J_x = 1$と考える。このとき,

$$J_xdx_1dx_2 = J_ydy_1dy_2$$

となり，$J_xdx_1dx_2$が座標変換不変で，測度を表していると考えることができる。

6　極座標系 (2 次元) と直交座標系

線形座標変換でない最も簡単な例として，極座標を考える。

6.1　座標変換

- 極座標から直交座標への変換

$$x^1 = r\cos\theta \tag{6}$$
$$x^2 = r\sin\theta \tag{7}$$

- 直交座標から極座標への変換

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \tag{8}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \tag{9}$$

- 座表変換より，x^1, x^2 は r, θ の関数であり，r, θ は x^1, x^2 の関数である (今まで，座標を下付き添字で表してきたが，今後上付き添字で表す)。
- 座標変換の関数であることを示すときは，$x^1(r,\theta)$，$x^2(r,\theta)$ や，$r(x^1, x^2)$，$\theta(x^1, x^2)$ と書く。

- 極座標へ変換したものを直交座標に変換すると元に座標値にもどる。

$$x^1(r(x^1,x^2),\theta(x^1,x^2)) = x^1 \tag{10}$$
$$x^2(r(x^1,x^2),\theta(x^1,x^2)) = x^2 \tag{11}$$

- 同様に，直交座標へ変換したものを極座標に変換すると元の座標値にもどる。

$$r(x^1(r,\theta),x^2(r,\theta))) = r \tag{12}$$
$$\theta(x^1(r,\theta),x^2(r,\theta))) = \theta \tag{13}$$

- これらの式は，$\frac{\partial r}{\partial x^\mu}$，$\frac{\partial \theta}{\partial x^\mu}$ と $\frac{\partial x^\mu}{\partial r}$，$\frac{\partial x^\mu}{\partial \theta}$ $(\mu = 1,2)$ の関係を求めるときに使う。

6.1.1　余接ベクトル

- 余接ベクトル：ある点における関数の1次の増減を表している。

- 点 Q を (x_Q^1, x_Q^2) および (r_Q, θ_Q) で表わすものとする。

- 点 Q における直交座標系の基底による余接ベクトルは次のように表わされる。

$$\xi_1 dx^1 + \xi_2 dx^2$$

- 点 Q における極座標系の基底による余接ベクトルは次のように表わされる。

$$\eta_1 dr + \eta_2 d\theta$$

- 極座標の余接ベクトルの基底を直交座標の余接ベクトルで表すと次のようになる。

$$dr = \left.\frac{\partial r}{\partial x^1}\right|_Q dx^1 + \left.\frac{\partial r}{\partial x^2}\right|_Q dx^2 = \frac{x_Q^1}{\sqrt{(x_Q^1)^2 + (x_Q^2)^2}} dx^1 + \frac{x_Q^2}{\sqrt{(x_Q^1)^2 + (x_Q^2)^2}} dx^2$$

$$d\theta = \left.\frac{\partial \theta}{\partial x^1}\right|_Q dx^1 + \left.\frac{\partial \theta}{\partial x^2}\right|_Q dx^2 = -\frac{x_Q^2}{(x_Q^1)^2 + (x_Q^2)^2} dx^1 + \frac{x_Q^1}{(x_Q^1)^2 + (x_Q^2)^2} dx^2$$

- 逆に，直交座標の余接ベクトルの基底を極座標の余接ベクトルで表すと次のようになる。

$$dx^1 = \left.\frac{\partial x_1}{\partial r}\right|_Q dr + \left.\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\right|_Q d\theta = (\cos\theta_Q)dr - (r_Q \sin\theta_Q)d\theta$$

$$dx^2 = \left.\frac{\partial x_2}{\partial r}\right|_Q dr + \left.\frac{\partial x^2}{\partial \theta}\right|_Q d\theta = (\sin\theta_Q)dr + (r_Q \cos\theta_Q)d\theta$$

6.2　接ベクトル

- 接ベクトル：関数の増加を調べる方向と倍率を表している。
- 点 Q を (x^1_Q, x^2_Q) および (r_Q, θ_Q) で表わすものとする。
- 点 Q における直交座標系の接ベクトル：

$$\alpha_1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_Q + \alpha_2 \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_Q$$

- 点 Q における極座標系の接ベクトル：

$$\beta_1 \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_Q + \beta_2 \left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_Q$$

- 極座標の接ベクトルの基底を直交座標の接ベクトルで表すと次のようになる。

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_Q = \left.\frac{\partial x^1}{\partial r}\right|_Q \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_Q + \left.\frac{\partial x^2}{\partial r}\right|_Q \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_Q = \cos\theta_Q \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_Q + \sin\theta_Q \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_Q$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_Q = \left.\frac{\partial x^1}{\partial \theta}\right|_Q \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_Q + \left.\frac{\partial x^2}{\partial \theta}\right|_Q \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_Q = -r_Q\sin\theta_Q \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_Q + r_Q\cos\theta_Q \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_Q$$

- 直交座標の接ベクトルの基底を極座標の接ベクトルで表すと次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_Q &= \left.\frac{\partial r}{\partial x^1}\right|_Q \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_Q + \left.\frac{\partial \theta}{\partial x^2}\right|_Q \left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_Q \\
&= \frac{x_Q^1}{\sqrt{(x_Q^1)^2 + (x_Q^2)^2}} \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_Q - \frac{x_Q^2}{(x_Q^1)^2 + (x_Q^2)^2} \left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_Q \\
\left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_Q &= \left.\frac{\partial r}{\partial \theta}\right|_Q \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_Q + \left.\frac{\partial \theta}{\partial x^2}\right|_Q \left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_Q \\
&= \frac{x_Q^2}{\sqrt{(x_Q^1)^2 + (x_Q^2)^2}} \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_Q + \frac{x_Q^1}{(x_Q^1)^2 + (x_Q^2)^2} \left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_Q
\end{aligned}
$$

6.3 ベクトルの基底の変換のまとめ

- 行列A_Q，B_Qを以下のようにおく。

$$A_Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_Q^1}{\sqrt{(x_Q^1)^2+(x_Q^2)^2}} & \frac{x_Q^2}{\sqrt{(x_Q^1)^2+(x_Q^2)^2}} \\ -\frac{x_Q^2}{(x_Q^1)^2+(x_Q^2)^2} & \frac{x_Q^1}{(x_Q^1)^2+(x_Q^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$B_Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_Q & -r_Q \sin\theta_Q \\ \sin\theta_Q & r_Q \cos\theta_Q \end{pmatrix}$$

- 次式が成り立つ。

$$B_Q = A_Q^{-1} \tag{14}$$

- この式は，次の式から明らである。

$$A_Q = \begin{pmatrix} \cos\theta_Q & \sin\theta_Q \\ -\frac{1}{r_Q}\sin\theta_Q & \frac{1}{r_Q}\cos\theta_Q \end{pmatrix}$$

- 一般に，式(14)は，式(10)，(11)，あるいは式(12)，(13) から示すことができる。

- これらの行列により，以下のように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = A_Q \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix} = B_Q \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_Q \\ \left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_Q \end{pmatrix} = B_Q^T \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_Q \\ \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_Q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_Q \\ \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_Q \end{pmatrix} = A_Q^T \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_Q \\ \left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_Q \end{pmatrix}$$

6.4　ベクトルの係数の変換

- 2つの座標系で余接ベクトルが同じベクトルを表わしている，すなわち，

$$\xi_1 dx^1 + \xi_2 dx^2 = \eta_1 dr + \eta_2 d\theta$$

が成立するならば,

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = B_Q^T \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = A_Q^T \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

のように，係数が変換される必要がある。

- **演習**：前節の結果を使ってこの関係を示せ。

$$\xi_1 dx^1 + \xi_2 dx^2 = (\xi_1 \ \ \xi_2) \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$$

を使うと，計算が簡単である。

- 基底の変換と係数の変換は異なることがわかる。

- 2つの座標系で接ベクトルが同じベクトルを表わしている，すなわち，

$$\alpha_1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_Q + \alpha_2 \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_Q = \beta_1 \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_Q + \beta_2 \left.\frac{\partial}{\partial \theta}\right|_Q$$

  が成立するならば，

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} = A_Q \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = B_Q \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$$

  のように，係数が変換される必要がある。
- **演習：**前節の結果を使ってこの関係を示めせ。
- 座標変換は非線形なのに，接ベクトルの変換は線形になる。
- これは，ある一点Qにおける関数などの一次近似の性質だけを考えているため，変換の1次近似で表わすことが可能で，線形な関係となっている。
- 余接ベクトルや接ベクトルは，点ごとに定義されている。上の場合は点Q上の接ベクトル，余接ベクトルである。定義される点が異なれば，ベクトルは別の空間に属すると考える。

6.5　測度の変換

- 微小な面積も同様である。4点(r,θ)，$(r+r,\theta)$，$(r,\theta+d\theta)$，$(r+dr,\theta+d\theta)$で囲まれる図形の面積を考える。(x^1,x^2)座標系に戻して考えれば，その面積は，
$$\det(B_Q)drd\theta = \det(A_Q)^{-1}drd\theta = rdrd\theta$$
となる。
- これを，
$$dx^1dx^2 = rdrd\theta$$
と書くが。。。。
- 注意：dx^1dx^2にdx^1とdx^2からdrと$d\theta$への変換式を直接代入しても成立しない。
dx^1dx^2は，微小な面積要素(測度)を意味しているのであって，dx^1とdx^2の積を表しているわけではない。

- 一般に，余接ベクトルu，vに対してウェッジ積を$u \wedge v$で記し，

$$
\begin{aligned}
(v+u) \wedge w &= v \wedge w + v \wedge w \\
(\alpha u) \wedge v &= \alpha(u \wedge v) \\
u \wedge v &= -v \wedge u
\end{aligned}
$$

  という関係を与える。$dx^1 \wedge dx^2$に対して，dx^1, dx^2を$dr, d\theta$で表す式を代入すると，

$$dx^1 \wedge dx^2 = r dr \wedge d\theta$$

  が成立する。このウェッジ積を面積要素とすれば，単に変換式を代入するだけで面積要素の変換が計算できる。
- **演習：**上を確かめてみて下さい。

6.6　2つの曲線がなす角度

- 2つの曲線がなす角を考える。
- 2つの曲線$(x^1(t), x^2(t))$と$(x'^1(t), x'^2(t))$が，$t = 0$のとき点Qで交わるとする。
- (x^1, x^2)座標系はユークリッド空間であるので，2つの曲線がなす角は，次の2つのベクトル(座標値のtによる微分値を並べたベクトル)

$$a = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{dx_1}{dt}\right|_Q \\ \left.\dfrac{dx_2}{dt}\right|_Q \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{dx'_1}{dt}\right|_Q \\ \left.\dfrac{dx'_2}{dt}\right|_Q \end{pmatrix}$$

がなす角に等しい。

- 従って，このベクトルの内積を計算すれば，角度αが分る。

$$\cos\alpha = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\|b\|}$$

- $\langle a, b\rangle$と$\|a\|$は，それぞれ，ユークリッド空間における内積とノルムである。
- 同じ曲線が極座標で表わされているものとする。

- $(r(t), \theta(t))$，$(r'(t), \theta'(t))$ は，座標変換で与えることができる。
- 同様に，ベクトル c，d を，次のようにおく。

$$c = \begin{pmatrix} \left.\frac{dr}{dt}\right|_Q \\ \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_Q \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} \left.\frac{dr'}{dt}\right|_Q \\ \left.\frac{d\theta'}{dt}\right|_Q \end{pmatrix}$$

- ことのき，次の式が成立する。

$$a = B_Q c \quad b = B_Q d$$

これは接ベクトルの係数の変換と同じ変換となる。
- $\langle a, b\rangle \neq \langle c, d\rangle$ であるから，ユークリッド空間の内積の定義 $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1} a_i b_i$ は，座標変換不変ではない。

- 角度が次のように計算できる。

$$\cos\alpha = \frac{\langle B_Q c, B_Q d\rangle}{\|B_Q c\|\|B_Q d\|}$$
$$= \frac{\begin{pmatrix} \left.\frac{dr}{dt}\right|_Q & \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_Q \end{pmatrix} B_Q^T B_Q \begin{pmatrix} \left.\frac{dr'}{dt}\right|_Q \\ \left.\frac{d\theta'}{dt}\right|_Q \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} \left.\frac{dr}{dt}\right|_Q & \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_Q \end{pmatrix} B_Q^T B_Q \begin{pmatrix} \left.\frac{dr'}{dt}\right|_Q \\ \left.\frac{d\theta'}{dt}\right|_Q \end{pmatrix}} \sqrt{\begin{pmatrix} \left.\frac{dr}{dt}\right|_Q & \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_Q \end{pmatrix} B_Q^T B_Q \begin{pmatrix} \left.\frac{dr'}{dt}\right|_Q \\ \left.\frac{d\theta'}{dt}\right|_Q \end{pmatrix}}} \tag{15}$$

- **演習**：上式を確かめる。

6.7　計量テンソル

- 空間の曲線の長さを考える。
- 曲線$(x^1(t), x^2(t))$が与えられているものとする。
- tから$t+dt$まで変化したとき，座標は，$(x^1(t), x^2(t))$から

$$(x^1(t+dt), x^2(t+dt)) \simeq \left(x^1(t) + \frac{dx^1}{dt}dt, x^2(t) + \frac{dx^2}{dt}dt \right)$$

  まで，変化する。
- その微小線分の長さdlは，以下の通りである。

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2}\, dt$$

- tがt_1からt_2まで変化するときには，次のようになる。

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2}\, dt$$

- 極座標ではどうなるか。
- 同じ曲線が，$(r(t), \theta(t))$で与えられている。
- tから$t + dt$まで変化したとき，座標は，$(r(t), \theta(t))$から

$$(r(t + dt), \theta(t + dt)) \simeq \left(r(t) + \frac{d\theta}{dt}dt, \theta(t) + \frac{d\theta}{dt}dt \right)$$

まで変化する。
- 変化を微小なベクトルで表わせば，

$$(dr, d\theta) = \left(\frac{d\theta}{dt}dt, \frac{d\theta}{dt}dt \right)$$

- この長さは，$(dr, d\theta)$を(dx^1, dx^2)で表して計算できる。

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = (dx^1\ dx^2)(dx^1\ dx^2)^T = (dr\ d\theta)B_Q^T B_Q (dr\ d\theta)^T$$

- $G_Q = B_Q^T B_Q$(計量テンソル)を定義する。
- G_Qは2×2の対称行列になっている。

- t_1 から t_2 までの曲線の長さは，下式のようになる。

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} & \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} G_Q \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix}}\, dt$$

- 面積要素における $\det(B_Q) dr d\theta$ も，

$$\det G_Q = \det B_Q^T B_Q = (\det(B_Q))^2$$

より，以下の様に書くことができる。

$$\sqrt{|\det G_Q|}\, dr d\theta$$

- 角度を求めるときの内積(式(15))の計算においても，変換に関する項は $G_Q = B_Q^T B_Q$ だけしかない。
- G_Q さえ与えられていれば，座標変換を行なうことなく，極座標の中で，長さ，面積，角度などの幾何学的な量を扱っていくことができる。
- 計量テンソルが大切！

ところで，テンソルって？

- 0階のテンソル：スカラー
- 1階のテンソル：ベクトル
- 2階のテンソル：行列
- 3階のテンソル：要素の表示が(a_{ijk})と3つの添字を持つ。
- 4階のテンソル：要素の表示が(a_{ijkl})と4つの添字を持つ。

座標変換に対する要素の変換が，ある特定の規則に従っているものだけを「テンソル」と呼ぶ場合もある。

7　一般座標変換(多次元)

7.1　一般座標変換

- 座標系$\{x^\mu\}$から$\{y^\mu\}$への変換 ($\mu = 1, 2, \ldots, n$)：

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1(x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad (16) \\ y^2 &= y^2(x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad (17) \\ &\cdots \quad (18) \\ y^n &= y^n(x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad (19) \end{aligned}$$

- 座標系$\{y^\mu\}$から$\{x^\mu\}$への (逆) 変換 ($\mu = 1, 2, \ldots, n$)：

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(y^1, y^2, \ldots, y^n) \quad (20) \\ x^2 &= x^2(y^1, y^2, \ldots, y^n) \quad (21) \\ &\cdots \quad (22) \\ x^n &= x^n(y^1, y^2, \ldots, y^n) \quad (23) \end{aligned}$$

7.2 Einsteinの縮約規則

- 上付きと下付きで同じ文字の添字がある場合は和を取ることとする。

$$X^\alpha Y_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} X^\alpha Y_\alpha = X^1 Y_1 + X^2 Y_2 + \cdots + X^n Y_n \tag{24}$$

$$X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n} X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n} \tag{25}$$

$$a^{\mu\alpha} b_{\alpha\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n} a^{\mu\alpha} b_{\alpha\nu} = a^{\mu 1} b_{1\nu} + a^{\mu 2} b_{2\nu} + \cdots + a^{\mu n} b_{n\nu} \tag{26}$$

$$a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} \tag{27}$$

$$a^\alpha_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} a^\alpha_\alpha = a^1_1 + a^2_2 + \cdots + a^n_n \tag{28}$$

- 式(24)は，線形汎関数を作用させたものと考えることができる。
- 式(26)は，行列の積と考えることができる。
- $\mu = 1, 2, \ldots, n$ に対して次式が成立する。

$$\begin{aligned} x^\mu(y^1(x^1, x^2, \ldots, x^n), y^2(x^1, x^2, \ldots, x^n), \ldots, y^n(x^1, x^2, \ldots, x^n)) &= x^\mu \\ y^\mu(x^1(y^1, y^2, \ldots, y^n), x^2(y^1, y^2, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, y^2, \ldots, y^n)) &= y^\mu \end{aligned}$$

- 上式を，x^ν，y^ν で微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\nu} = \delta^\nu_\mu \tag{29}$$

$$\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{30}$$

ここで，δ^μ_ν は，次のように定義されている。

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \tag{31}$$

- 例えば式(29)から，$\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}$ は，$\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}$ の逆行列であることが分かる。
  演習：上式を証明して下さい。

7.3　余接ベクトル

- 余接ベクトル：ある点における関数の1次の増加を表す。
- 点Pにおける座標系$\{x^\mu\}$による基底を使った余接ベクトル：

$$X_\alpha dx^\alpha = X_1 dx^1 + X_2 dx^2 + \cdots + X_n dx^n$$

- 点Pにおける座標系$\{y^\mu\}$による基底を使った余接ベクトル：

$$Y_\alpha dy^\alpha = Y_1 dy^1 + Y_2 dy^2 + \cdots + Y_n dy^n$$

- 座標系$\{y^\mu\}$による余接ベクトルの基底dx^μを，$\{x^\mu\}$による基底で表すと次のようになる。

$$dy^\mu = \left.\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\right|_P dx^\alpha \left(= \left.\frac{\partial y^\mu}{\partial x^1}\right|_P dx^1 + \left.\frac{\partial y^\mu}{\partial x^2}\right|_P dx^2 + \cdots + \left.\frac{\partial y^\mu}{\partial x^n}\right|_P dx^n \right) \tag{32}$$

- その逆は，次のようになる。

$$dx^\mu = \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\right|_P dy^\alpha \left(= \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial y^1}\right|_P dy^1 + \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial y^2}\right|_P dy^2 + \cdots + \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial y^n}\right|_P dy^n \right) \tag{33}$$

- Pは，文脈上明らかな場合しばしば省略される。

7.4　余接ベクトルの係数の変換

- X_α，Y_αを，それぞれ，ある余接ベクトルの座標系$\{x^\mu\}$，$\{y^\mu\}$の基底に対する係数とする。そして，

$$X_\alpha dx^\alpha = Y_\alpha dy^\alpha \tag{34}$$

が成立するように係数の変換則を決めると，次式が得られる。

$$Y_\mu = \left.\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\right|_P X_\alpha = \left.\frac{\partial x^1}{\partial y^\mu}\right|_P X_1 + \left.\frac{\partial x^2}{\partial y^\mu}\right|_P X_2 + \cdots + \left.\frac{\partial x^n}{\partial y^\mu}\right|_P X_n \tag{35}$$

$$X_\mu = \left.\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\right|_P Y_\alpha = \left.\frac{\partial y^1}{\partial x^\mu}\right|_P Y_1 + \left.\frac{\partial y^2}{\partial x^\mu}\right|_P Y_2 + \cdots + \left.\frac{\partial y^n}{\partial x^\mu}\right|_P Y_n \tag{36}$$

- 係数が上式のように変換するベクトルを，共変ベクトルと呼ぶ。
- 簡単のため，以後余接ベクトルと共変ベクトルを同一視する。
- **演習**：上式を証明せよ。
- この先，共変ベクトルX_μと記すが，これは単に係数を並べたものではなく，$X_\mu dx^\mu$を意味していることを忘れないこと。

7.5 接ベクトル

- 接ベクトル：関数の増加を調べる方向と倍率
- 点Pにおける座標系$\{x^\mu\}$の基底による接ベクトル：

$$X^\alpha \left.\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right|_P = X^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_P + X^2 \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_P + \cdots + X^n \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_P$$

- 点Pにおける座標系$\{y^\mu\}$の基底による接ベクトル：

$$Y^\alpha \left.\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right|_P = Y^1 \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_P + Y^2 \left.\frac{\partial}{\partial y^2}\right|_P + \cdots + Y^n \left.\frac{\partial}{\partial y^n}\right|_P$$

- 2つの座標系の接ベクトルの変換の基底の関係

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right|_P = \left.\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\right|_P \left.\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right|_P = \left.\frac{\partial x^1}{\partial y^\mu}\right|_P \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_P + \left.\frac{\partial x^2}{\partial y^\mu}\right|_P \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_P + \cdots + \left.\frac{\partial x^n}{\partial y^\mu}\right|_P \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_P$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_P = \left.\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\right|_P \left.\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right|_P = \left.\frac{\partial y^1}{\partial x^\mu}\right|_P \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_P + \left.\frac{\partial y^2}{\partial x^\mu}\right|_P \left.\frac{\partial}{\partial y^2}\right|_P + \cdots + \left.\frac{\partial y^n}{\partial x^\mu}\right|_P \left.\frac{\partial}{\partial y^n}\right|_P$$

7.6 接ベクトルの係数の変換

- X^α，Y^α を，それぞれ，ある接ベクトルのそれぞれの座標系の基底に対する係数とする。そして，

$$X^\alpha \left.\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right|_P = Y^\alpha \left.\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right|_P \tag{37}$$

が成立するように，係数の変換則を決めると次式が得られる。

$$Y^\mu = \left.\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\right|_P X^\alpha \tag{38}$$

$$X^\mu = \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\right|_P Y^\alpha \tag{39}$$

- 係数が上式のように変換するベクトルを，反変ベクトルと呼ぶ。(接ベクトルは反変ベクトル)
- 簡単のため，以後接ベクトルと反変ベクトルを同一視する。
- **演習**：上式を証明せよ。
- この先，反変ベクトルX^μと記すが，これは単に係数を並べたものではなく，$X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$を意味していることを忘れないこと。

7.7　計量テンソルの変換

- 定義：$(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ の近傍の点 $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, \ldots, x^n + dx^n)$ までの距離 dl は，次式のように表わされるものとする。

$$(dl)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{40}$$

  $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルである。

- また，簡単のため上の2つの点を，それぞれ，x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ とで表す。
- 2次元ならば次のようになる。($g_{\mu\nu}$ は対称である。)

$$(dl)^2 = g_{11} dx^1 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{21} dx^2 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2 \tag{41}$$

- $\{x^\mu\}$ が n 次元のユークリッド座標系ならば，

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \equiv \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \tag{42}$$

  であり，次式が成立する。

$$(dl)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2 \tag{43}$$

- 計量が分かればその座標系が表わしている物体について，およそのことが分かる。平面とか球面とか。

- 球面ならば，(θ, ϕ) 座標系では以下のようになる。

$$(dl)^2 = (d\theta)^2 + (\sin\theta)^2 (d\phi)^2 \tag{44}$$

これを座標変換して得られる計量テンソルをもつ座標系だけが球面の座標系である。

- 距離は座標の取り方によらない。
- 従って，距離は座標変換によらない。

座標系 $\{y^\mu\}$ に対する計量テンソルを $g'_{\mu\nu}$ で記せば，次式が成立する必要がある。

$$g'_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

ここで，$dx^\alpha dx^\beta$ が表すものは，測度でなく，dx^α と dx^β の積である。

- 余説ベクトルの逆変換則(33)を代入して，次式が得られる。

$$g'_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} dy^\mu dy^\nu$$

- 上式が任意の dy^μ に対して成立するため，次式が成立する。

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} g_{\alpha\beta}$$

- 場
  - ベクトル場：座標系が表わしている空間のそれぞれの点にベクトル空間が張りついていて，各点でベクトルが定義されているもの
    共変ベクトル場，**反変ベクトル場**。
  - テンソル場：各点でテンソルが定義されているもの
- 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は一般にはテンソル場である。
- 本当は点 P におけるテンソルであることを示す P を付けて書く必要がある。
- ただ，文脈上，明らかな場合は P を省略して書く。
- 省略しないと次のようになる。

$$g'_{\mu\nu}\Big|_P = \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\right|_P \left.\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}\right|_P g_{\mu\nu}\Big|_P$$

- 明らかに次式が成立する。(P を省略して書いている。)

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\alpha\beta}$$

- $g_{\mu\nu}$ のように変換するものを2階の共変テンソル(場)と呼ぶ。

- 各点において， $g^{\mu\nu}$ を，$g_{\mu\nu}$ の逆行列で定義する。

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$$

- 各点においては単なる行列演算であり，次の変換則が得られる。

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}\, g^{\alpha\beta}$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}\, g'^{\alpha\beta}$$

- $g_{\mu\nu}$ のように変換するものを2階の反変テンソル(場)と呼ぶ。
- X_μ を共変ベクトル，X^μ を反変ベクトルとすれば,

$$g^{\mu\alpha} X_\alpha, \qquad g_{\mu\alpha} X^\alpha$$

  は，それぞれ，反変ベクトル，共変ベクトルになる。
  (X_μ で $g^{\mu\alpha} X_\alpha$ を，X^μ で $g_{\mu\alpha} X^\alpha$ を表わす場合がある。)
- さらに，Y_μ を共変ベクトル，Y^μ を反変ベクトルとすれば,

$$g^{\alpha\beta} X_\alpha Y_\beta \qquad g_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \qquad X^\alpha Y_\beta$$

  は，座標変換に依存しないスカラーになる。

7.8　ベクトルの内積

- $\{x^\mu\}$は，一般には直交座標系ではない。
- 点Pにおける，$g_{\mu\nu}$は単なる対称正定値行列(Gで表す)
  正定値でないと距離が負になってしまう。
  (ただし，負になる場合も扱う。)
- Aが正定値行列であるとは，任意の0でないベクトル$\boldsymbol{f}$に対して，

$$\langle \boldsymbol{f}, A\boldsymbol{f} \rangle > 0$$

  が成立すること。($\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$で，(普通の)ベクトル$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の内積を表わしている。)
- $G = DD$となる対称な行列Dが存在する。
  証明：Gの固有値展開は，ある直交行列U ($UU^T = I$)に対して，

$$G = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$

と書くことができる。このとき,

$$D = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} U^T$$

とすれば,Dの条件を満たすことが簡単にわかる。

- $\{x^\mu\}$における点Pを$\{x_P^\mu\}$で表す。上の行列Dを使って,座標系$\{y^\mu\}$を次の変換によって定義する。

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x^1 - x_P^1 \\ x^2 - x_P^2 \\ \vdots \\ x^n - x_P^n \end{pmatrix}$$

- このとき計量テンソルは次のようになる。

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} (D^{-1})_{\mu\alpha}(D^{-1})_{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = \delta_{\mu\nu} \tag{45}$$

- これは局所的な正規直交座標系を表わしている。すなわち，点y^μの近傍の点$y^\mu + dy^\mu$までの距離が，

$$(dl)^2 = (dy_1)^2 + (dy_2)^2 + \cdots + (dy_2)^n \tag{46}$$

と書くことができる。
- 接ベクトルの内積は，この局所的な正規直交座標系の空間で定義される。
- すなわち，座標系$\{x^\mu\}$における，2つの反変ベクトルX^μ，W^μの内積は，それを，局所的な直交座標系$\{y^\mu\}$に変換した，Y^μ，Z^μに対して，

$$\sum_{\alpha=1}^{n} Y^\alpha Z^\alpha$$

で定義することができる。
- このとき，次式が成立する。

$$\sum_{\alpha=1}^{n} Y^\alpha Z^\alpha = g_{\alpha\beta} X^\alpha Z^\beta \tag{47}$$

- **演習** 上式を示めせ。

8　Riemann 多様体の定義

- n 次元可微分多様体 M とは，以下の条件を満たすものである。
  - M が位相空間 (開集合が定義されている) である。
  - ハウスドロフ空間
    (異なる 2 点 $x, y \in M$ に対して，x を含む開集合 X と y を含む開集合 Y が存在して，$X \cap Y = \phi$)
  - M に開被覆 $\{U_i\}$ が存在
    (幾つかの開集合 U_i で M を覆うことができるということ)
  - U_i から R^n の開集合への同相写像 ϕ_i が存在する。(R^n での座標が M の局所座標になる。) (同相写像は，1 対 1 の写像で，開集合と開集合が対応する写像)
  - $U_i \cap U_j \neq \phi$ ならば，任意の $\phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ 点に対して，
    $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ (R^n から R^n への写像) が無限回連続微分可能。
    ($\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ は，同じ点を表わしているので座標変換である)
- M の点を R^n の点に写像して，その点の近傍の局所的な座標を定義している。

- その座標系はMに対してグローバルなものでなく，U_iごとに与えられている。
- Mのある点が2つのU_iに含まれているとき，座標値も2つ持つことになるが，その2つの座標変換は無限回微分可能である必要がある。
- 次に，n次元Riemann多様体Mとは，Mが可微分多様体であり，次の条件を満たすものである。
  - Mの各点Pにおいて，計量が定義されている。
    $P \in U_i$ならば，$x = \phi_i(P)$に対して，テンソル$g_{\mu\nu}$が定義されている。
    さらに，$P \in U_i \cap U_j$のとき，$x = \phi_i(P)$に$g_{\mu\nu}$が，$x = \phi_j(P)$に$g'_{\mu\nu}$が定義されているならば，それらは座標変換に対する変換の関係で結ばれている。
- これにより，Mに含まれる近傍の2点に距離を定義することができる。
- 次に，R^nへの同相写像ϕ_iによる局所座標をx^μなどで表し，余接ベクトル，接ベクトル，座標変換などを考える。

8.1　共変ベクトル

- 例：余接ベクトル(関数の増加の1次近似を表わす)

$$X_\mu dx^\mu$$

- 座標変換と共変ベクトルの係数の変換：
$\{x^\mu\}$におけるX^μから，$\{y^\mu\}$におけるY^μへの変換は以下の通りである。

$$Y_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} X_\alpha$$

- 係数は変換するが，それが表わしている余接ベクトルは不変である。

$$Y_\mu dy^\mu = X_\mu dx^\mu$$

- 以下では，共変ベクトルといえば余接ベクトルだけを考える。
- 計量テンソル$g_{\mu\nu}$：ある点から，dx^μ変化したところまでの距離dlが，次式で与えられる。

$$(dl)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

- $g^{\mu\nu}$：$g_{\mu\nu}$の逆行列

- 2つの共変ベクトルX_μ，X'_μの内積

$$g^{\alpha\beta}X_\alpha X'_\beta$$

- X_μはベクトルというよりベクトルの係数であるが，これを共変ベクトルと呼ぶ。単なる数を並べたものを意味しているのではないことを覚えておく必要がある(くどいかな)。

8.2　反変ベクトル

- 例：接ベクトル(関数の増加を調べる方向と倍率)

$$X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

経路 $x^\mu(t)$ に沿っての関数の変化。

$$\frac{f(x^\mu(t))}{dt} = \frac{x^\alpha(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} f$$

- 座標変換と共変ベクトルの係数の変換：
$\{x^\mu\}$ における X^μ から，$\{y^\mu\}$ における Y^μ への変換は以下の通りである。

$$Y^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} X^\alpha$$

- 係数は変換するが，それが表わしている接ベクトルは不変である。

$$Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

- 以下では，反変ベクトルといえば接ベクトルだけを考える。

- 2つの反変ベクトルX^μ，X'^μの内積を次のように定義する。

$$g_{\alpha\beta}X^\alpha X'^\beta$$

- X^μはどちらかというとベクトルの係数であるが，これを反変ベクトルと呼ぶ。単なる数を並べたものを意味しているのではないことを覚えておく必要がある(くどいかな)。

8.3 スカラー・ベクトル・テンソル

- 一般に，スカラーは数，ベクトルはベクトル，テンソルは行列などの0個以上の添字がある配列を意味する。
- 多様体の世界では，さらに，次のような座標変換に対する変換性があることを意味している。
  - スカラー：
    座標変換に依存しない。

$$\phi_Y(y^\mu) = \phi_X(x^\mu)$$

    ϕ_X と ϕ_Y は関数として異るが x^μ と y^μ が同じ場所を表わすとき，$\phi_X(x^\mu)$ と $\phi_Y(y^\mu)$ が同じ値になる。
  - ベクトル：
    共変ベクトルまたは反変ベクトル

- テンソル：(r,s)型テンソル
  r個の添字が共変ベクトルのように，s個の添字が反変ベクトルのように変換する。
  $$X^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_s}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}$$
  と書く。変換は,
  $$Y^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_s}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}=\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{\mu_1}}\frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial y^{\mu_2}}\cdots\frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial y^{\mu_r}}\frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\beta_1}}\frac{\partial y^{\nu_2}}{\partial x^{\beta_2}}\cdots\frac{\partial y^{\nu_s}}{\partial x^{\beta_s}}X^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_s}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}$$
  となる。
- $(r,0)$型，$(0,s)$型のテンソルを，それぞれ，r階の共変，s階の反変テンソルと呼ぶ。
- $(0,0)$型テンソルはスカラー
- $(1,0)$型テンソルは共変ベクトル
- $(0,1)$型テンソルは反変ベクトル

- また，多様体の各点に，スカラー，ベクトル，テンソルが与えられている場合，それぞれを，スカラー場，ベクトル場，テンソル場と呼ぶ。

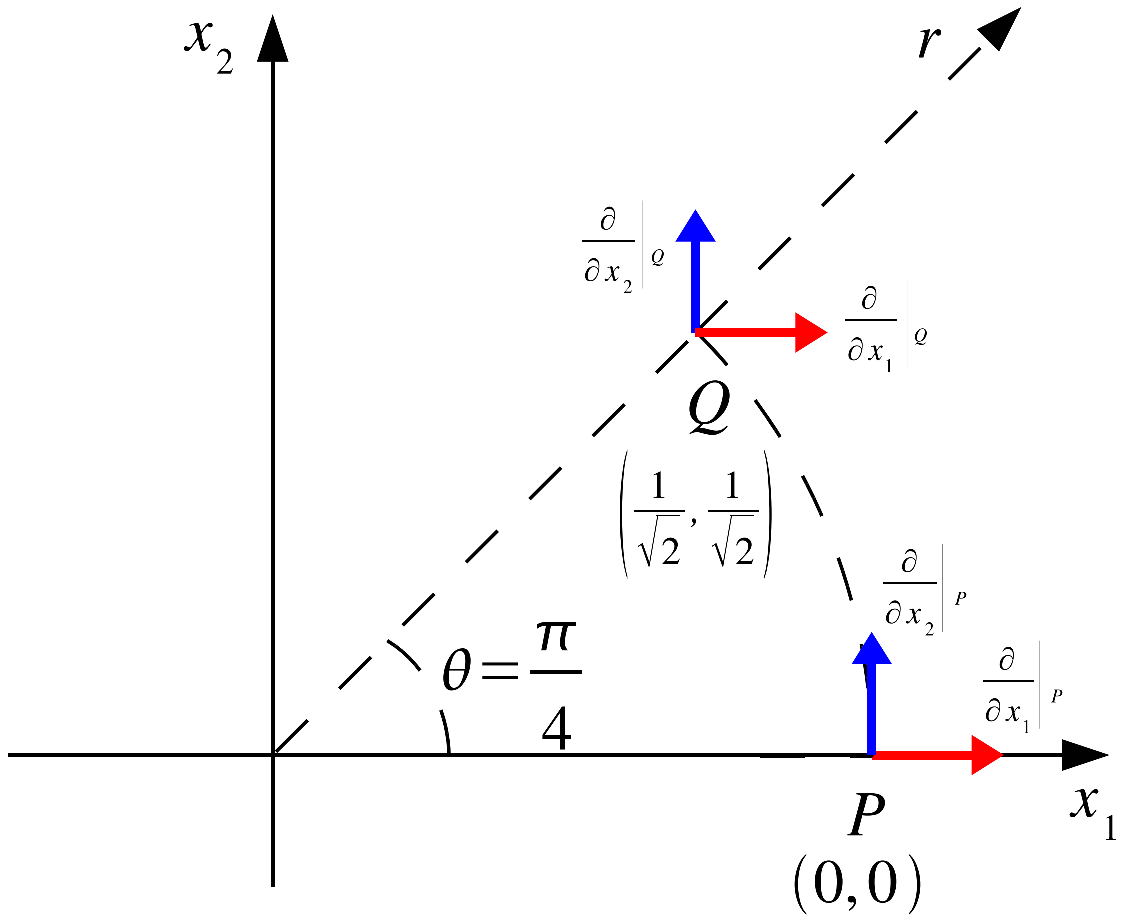
9　平行移動

- P，Q：多様体上の異る2点
- P，Q上で，それぞれ接ベクトル空間が決まる。
- それぞれの接ベクトルを考えることができる。

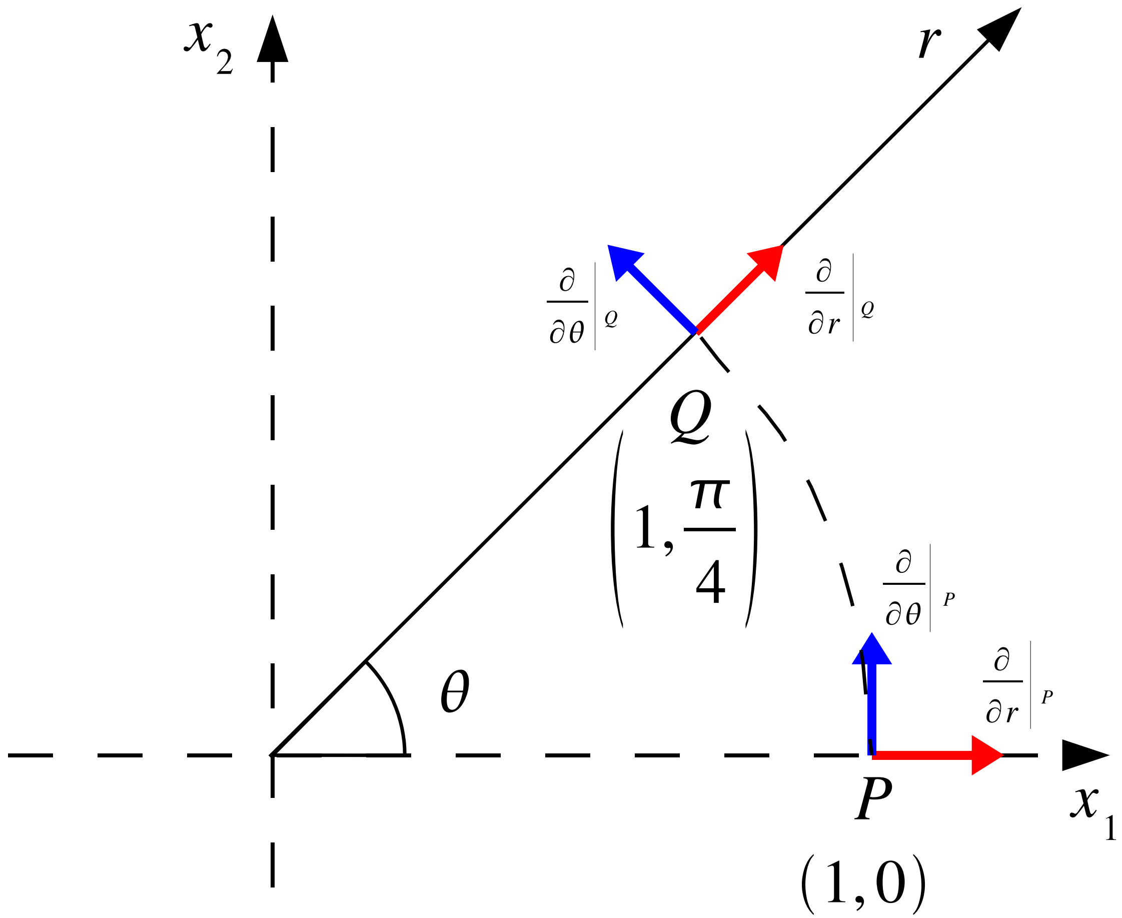
$$X^\alpha(P) \left.\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right|_P$$
$$X^\alpha(Q) \left.\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right|_Q$$

2つのベクトルの関係は？

- PのベクトルをQに平行移動することを考える。
  座標系の取り方によって異ならないようにする必要がある。
- $X^\mu(P) = X^\mu(Q)$ならば平行移動か？
- 例えば，(r, θ)座標系において，$P = (1, 0)$，$Q = (1, \pi/4)$としたとき，
  $X^\mu(P) = (1, 0)$と$X^\mu(Q) = (1, 0)$は平行移動したベクトルか？
  すなわち，$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_P$と$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_Q$は，平行移動したベクトルか？



- 正規直交座標系の接ベクトルの基底を使うと，
  $X^\mu(P) = (1,0)$ と $X^\mu(Q) = (1,0)$，すなわち，$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_P$ と $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_Q$ は，
  平行移動したベクトルのようである。



- 極座標系の接ベクトルの基底を使うと,
  $X^\mu(P) = (1,0)$ と $X^\mu(Q) = (1,0)$，すなわち，$\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_P$ と $\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_Q$ は,
  平行移動したベクトルではないようである。

9.1 接続

- 極座標の例では，直観的に考えても平行移動ではない。
- また，平行移動が座標変換不変でなくなってしまう。
- 少しだけ離れた位置における接ベクトルの平行移動を定義する。
- P と Q の座標を，それぞれ，x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ とする。
- $(X_{\|})^\mu(Q)$：P における反変ベクトル $X^\mu(P)$ を，Q に平行移動したものとする。
- 各点における平行移動による補正項を近似して考える。
  - 補正項は dx^μ に対して線形に変化
  - 補正項は $X^\mu(P)$ に対して線形に変化
- dx^μ と $X^\mu(P)$ に対して双線形になる次の変換を考える。

$$(X_{\|})^\mu(Q) = X^\mu(P) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(P)dx^\alpha X^\beta(P) \tag{48}$$

- $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$：接続係数
  異る点のベクトル空間におけるベクトルの平行移動を定る。
- $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}dx^\alpha X^\beta(P)$ が補正項

- 1次近似で，式(48)の右辺も反変ベクトルとして変換するようにして，$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$の変換を決める。

$$\left.\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\xi}}\right|_{Q}(X_{\|})^{\xi}(Q)=\left.\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\xi}}\right|_{P}X^{\xi}(P)+\Gamma'^{\mu}_{\alpha\beta}(P)\left.\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\xi}}\right|_{P}dx^{\xi}\left.\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\eta}}\right|_{P}X^{\eta}(P)$$

- $\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\xi}}$に，$P$におけるものと$Q$におけるものが存在するので注意。

- 解は以下の通り。

$$\Gamma'^{\mu}_{\alpha\beta}=\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial x^{\xi}}{\partial y^{\alpha}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial y^{\beta}}\Gamma^{\gamma}_{\xi\eta}+\frac{\partial^{2}x^{\gamma}}{\partial y^{\alpha}\partial y^{\beta}}\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\gamma}}$$

- 第2項が存在するために，接続係数はテンソルではない。

10　共変微分

- ユークリッド空間における，ベクトル場の微分
  - ダイバージェント：$\nabla \cdot (f_x, f_y, f_z) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$
  - ローテーション$\nabla \times (f_x, f_y, f_z) = (\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y})$
  - 磁界はベクトルポテンシャルの微分。
- 簡単のため以下の記号を定義する。

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

- 非線形な座標系，曲った空間では？$\Rightarrow$共変微分
- 平行移動したベクトルとの差で評価する。
  反変ベクトルX^μの共変微分：$\nabla_\nu X^\mu$はX^μのx^ν方向の変化を表す。

$$\nabla_\nu X^\mu|_P = \frac{(X_\|)^\mu(Q) - X^\mu(Q)}{dx^\nu} = \partial_\nu X^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} X^\alpha$$

  Qが出てきているが，(Pにおける共変微分である。

- 共変ベクトルX_μの共変微分を定義する。
- スカラーの共変微分は単なる微分。
- 任意の反変ベクトルY^μに対して，$X_\alpha Y^\alpha$は，スカラー
- 共変微分に関しても，ライプニッツの法則$(\nabla(ab) = (\nabla a)b + a(\nabla b))$が成立するものとする。この条件の下で次式が成立する。

$$(\nabla_\nu X_\alpha)Y^\alpha + X_\alpha(\nabla_\nu Y^\alpha) = \nabla_\nu(X_\alpha Y^\alpha) = \partial_\nu(X_\alpha Y^\alpha) = (\partial_\nu X_\alpha)Y^\alpha + X_\alpha(\partial_\nu Y^\alpha)$$

従って，

$$(\nabla_\nu X_\alpha)Y^\alpha + X_\alpha(\partial_\nu Y^\alpha + \Gamma^\alpha_{\nu\eta}Y^\eta) = (\partial_\nu X_\alpha)Y^\alpha + X_\alpha(\partial_\nu Y^\alpha)$$

が成立するので，次式が成立する。

$$\nabla_\nu X_\mu = \partial_\nu X_\mu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}X_\alpha$$

- 同様に，(r, s)型のテンソルに関して，次式が成立する。

$$\begin{aligned}\nabla_\gamma X^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_s}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r} &= \partial_\gamma X^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_s}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r} \\ &-\Gamma^{\alpha_1}_{\gamma\mu_1}X^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_s}_{\alpha_1\mu_2\cdots\mu_r} - \Gamma^{\alpha_2}_{\gamma\mu_2}X^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_s}_{\mu_1\alpha_2\cdots\mu_r} - \cdots - \Gamma^{\alpha_r}_{\gamma\mu_r}X^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_s}_{\mu_1\mu_2\cdots\alpha_r} \\ &+\Gamma^{\nu_1}_{\gamma\beta_1}X^{\beta_1\nu_2\cdots\nu_s}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r} + \Gamma^{\nu_2}_{\gamma\beta_2}X^{\nu_1\beta_2\cdots\nu_s}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r} + \cdots + +\Gamma^{\nu_s}_{\gamma\beta_s}X^{\nu_1\nu_2\cdots\beta_s}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}\end{aligned}$$

10.1 Levi-Chivita 接続

- 計量を使って，具体的に接続 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ を決める。
- 次の２条件を課して決める (接続には，他の決め方も存在する)。

1. $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$
   - 2つの微小移動 dx^{μ} と dx'^{μ} に対して上式の意味を考える。
   - dx^{μ} だけ移動してから dx'^{μ} 移動することを考える。このとき，始点が移動するので，dx'^{μ} は dx^{μ} だけ平行移動させる必要がある。最終的には，1次近似で次の場所に移動する。

$$(dx^{\mu}) + (dx'^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx'^{\beta})$$

   - 反対に，dx'^{μ} 移動してから dx^{μ} 移動する。

$$(dx'^{\mu}) + (dx^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx^{\beta})$$

   - 両者の差は，$\left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\right) dx^{\alpha} dx'^{\beta}$ となる。
   - 従って，この条件式が成立すれば，微小移動の順番が替えても，1次近似で同じ点に移動することになる。

2. 平行移動しても内積が変らない。

$$g_{\alpha\beta}(Q)X_{\|}{}^{\alpha}(Q)X_{\|}'^{\beta}(Q) = g_{\alpha\beta}(P)X^{\alpha}(P)X'^{\beta}(P)$$

- この条件は計量テンソルの共変微分が0と書くことができる。

$$\nabla_{\gamma} g_{\mu\nu} = 0$$

- 従って，添字を取り替えて，次式が成立する。

$$\nabla_{\gamma} g_{\mu\nu} = \partial_{\gamma} g_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\mu} g_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu} g_{\mu\alpha} = 0 \tag{49}$$

$$\nabla_{\nu} g_{\gamma\mu} = \partial_{\nu} g_{\gamma\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma} g_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} g_{\gamma\alpha} = 0 \tag{50}$$

$$\nabla_{\mu} g_{\nu\gamma} = \partial_{\mu} g_{\nu\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} g_{\alpha\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} g_{\nu\alpha} = 0 \tag{51}$$

- $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ も成立するので，(50) + (51) − (49) より次式が成立する。

$$\partial_{\mu} g_{\nu\gamma} + \partial_{\nu} g_{\gamma\mu} - \partial_{\gamma} g_{\mu\nu} = 2\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} g_{\alpha\gamma}$$

- 従って次式が成立し，計量から接続を求めることができる。

$$\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} = g^{\gamma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)$$

11　測地線

- $x^\mu(t)$：点 P から点 Q までの経路
- $t=0$ で点 P を出発し，$t=1$ で点 Q に到着するものとする。
- 微小時間 t から $t+dt$ までに，$\frac{dx^\mu(t)}{dt}dt$ だけ移動する。
- この微小距離は以下のように与えられる。

$$\sqrt{g_{\alpha\beta}(x^\mu(t))\,\frac{dx^\alpha(t)}{dt}\,\frac{dx^\beta(t)}{dt}}\,dt$$

- P から Q までの経路の長さは以下のようになる。

$$\int_0^1 \sqrt{g_{\alpha\beta}(x^\mu(t))\,\frac{dx^\alpha(t)}{dt}\,\frac{dx^\beta(t)}{dt}}\,dt$$

- 最短になる経路(測地線)を求める。
- $x(t)+\delta x(t)$ と経路を微少変化させ，$\delta x(t)$ の1次の係数が0になるとして方程式を得る(変分法)。

⇒ 測地線の方程式：ある関数 f に対して，次式が成立する。

$$\frac{d^2x^\mu(t)}{dt^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha(t)}{dt}\frac{dx^\beta(t)}{dt}=f\frac{dx^\mu(t)}{dt} \tag{52}$$

- 曲った空間で直線のようなものを与える。
  - $g_{\mu\nu}$ がユークリッド空間を表わすならば，測地線は非線形な座標系でも直線を表わしている。
  - また，例えば，球面上では測地線は大円になる。
- 次式が成立する。

$$\frac{d}{dt}=\frac{dx^\alpha(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

- 従って，測地線の方程式は，

$$\frac{dx^\alpha(t)}{dt}\nabla_\alpha\frac{dx^\mu(t)}{dt}=f\frac{dx^\mu(t)}{dt}$$

  と書くことができる。
- パラメータ t を変数変換することによって，$f=0$ とすることができる。

12　Riemann曲率

- 重力がある場合，質点の軌道が曲る？ $\Rightarrow$ ×
- 空間が曲っていて，質点は測地線にそって(まっすぐに)進んでいる。
- 曲っている空間とは？
- ベクトルX_μを，dx^μだけ平行移動してからdx'^μだけ平行移動する場合と，dx'^μだけ平行移動してからdx^μだけ平行移動する場合を考える。
- $\Gamma^\mu_{\nu\gamma} = \Gamma^\mu_{\gamma\nu}$が成立することを仮定し，両者の点の位置は同じとする。
- 前者と後者のベクトルは，それぞれ，以下の様になる。

$$X^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x^\nu)dx^\alpha X^\beta + \Gamma^\mu_{\xi\eta}(x^\nu + dx^\nu)dx'^\xi \left(X^\eta + \Gamma^\eta_{\alpha\beta}(x^\nu)dx^\alpha X^\beta\right)$$

$$X^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x^\nu)dx'^\alpha X^\beta + \Gamma^\mu_{\xi\eta}(x^\nu + dx'^\nu)dx^\xi \left(X^\eta + \Gamma^\eta_{\alpha\beta}(x^\nu)dx'^\alpha X^\beta\right)$$

- 曲率テンソル$R^\mu_{\nu\alpha\beta}$は，この差を表わす係数として定義される。

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} X^\nu dx'^\beta dx'^\alpha$$

- 次式が成立する。

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\nu} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\nu} + \Gamma^\eta_{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\eta} + \Gamma^\eta_{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\beta\eta}$$

13　極座標

平面の極座標を例に，接続や曲率を計算する。座標は,

$$\begin{aligned} x^1 &= r \\ x^2 &= \theta \end{aligned}$$

とする。微小距離は,

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2$$

となるので，計量テンソルは,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 \end{pmatrix}$$

となる。

次に，リーマン接続$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$計算する。

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} &= g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha\beta} \\ \Gamma_{\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

を使う。

例えば，次式が成立する。

$$\Gamma_{221} = (\partial_2 g_{21} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21})/2 = x^1$$

計量テンソルの微分は，g_{22} を x^1 で微分する以外は0であるので，

$$\Gamma_{221} = \Gamma_{212} = -\Gamma_{122} = x^1$$

以外は全て0になる。従って，$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ は，以下のようになる。

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{x^1}$$
$$\Gamma^1_{22} = -x^1$$

問題　曲率テンソルを計算せよ。R^1_{212} と R^2_{121} を計算すればよい。

問題　スカラー曲率

$$R = g^{\alpha\beta} R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}$$

を計算せよ。この場合は，次式を計算すればよい。

$$g^{11} R^2_{121} + g^{22} R^1_{212}$$

14　球面

球面上の座標系を,

$$
\begin{aligned}
x^1 &= \theta \\
x^2 &= \phi
\end{aligned}
$$

とする。微小距離は,

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (\sin x^1)^2(dx^2)^2$$

で与えられる。

問題　計量，接続，曲率テンソル，スカラー曲率を計算せよ。

15　Minkowski時空

話を特殊相対論に戻す。

- 時間 t を x^0 と表し，(x^0, x^1, x^2, x^3) という4次元座標を考える。
- 次の計量テンソルを考える。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & (\mu = \nu = 0) \\ 1 & (\mu = \nu \neq 0) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

　このテンソル場は全ての点で，上式のような一定の値であると考える。

- (計量テンソルや曲率テンソルは，テンソル場で)，各点で定義されている。
- 計量は以下のようになる。

$$(ds)^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)$$

- この計量がマイナスになるときがあるが，気にしない。

- 計量$(ds)^2$はローレンツ変換不変である。
  空間1次元，時間1次元のときに確かめる。

$$
\begin{aligned}
dx' &= \gamma(dx - vdt) \\
dt' &= \gamma(-vdx + dt) \\
&\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}
\end{aligned}
$$

  より，

$$
-(dt')^2 + (dx')^2 = \gamma^2\{-(dx - vdt)^2 + (-vdx + dt)^2\} = -(dt)^2 + (dx)^2
$$

  となり不変になっていることがわかる。
- この計量で測地線を計算するとどうなるか？
  - 計量は定数なので，接続係数は全て0になる。
  - 従って，測地線の方程式は，以下のようになる.

$$
\frac{d^2x^\mu(t)}{dt^2} = 0
$$

  となる。

– この解は，定数 a^μ, a^μ に対して，

$$x^\mu(t) = a^\mu t + b^\mu$$

となる。この解はいわゆる直線を示している。

- この式では，t は単なるパラメータで $x^0(t)$ が時間であるが，$x^0(t)$ に対して $x^i(t) \quad (i = 1, 2, 3)$ が 1 次になっているため，上式は等速直線運動を表している。

- 座標 $x(t)$ で運動しているものの普通の速度は次のように定義される。

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}$$

- この速度は残念ながらローレンツ変換に従わない。
座標系によって時間の進み方が異なるからである(3次元のベクトルなのでもともと無理)。
- そこで，固有時 τ を導入する。
これは，その対象物体に固定した座標系おける時間を意味している。

- 4次元速度を次のように定義する。

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

- u^0 は，その座標系での時間を固有時で微分したもの
- 物体が遅ければ，固有時は普通の時間と等しいため($\gamma \simeq 1$)，u^1, u^2, u^3 は，ほとんど普通の速度 v^1, v^2, v^3 と一致し，$u^0 \simeq 1$ となる。
- 物体が速い場合，γ 倍だけ速さの値が大きくなる。

$$u^i = \gamma v^i$$

- 固有時 τ は座標変換不変である(座標を対象物体に固定するため)。
  → 4次元速度は座標同様にローレンツ変換に従う。
- (普通の)運動量は次のように定義されている。

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

- 4次元運動量を次のように定義する。

$$p^\mu = mu^\mu$$

- 対象物体に固定した座標系における4次元座標 $\tilde{x}^{\mu}$ は，物体の空間的位置を原点におけば，以下のようになる。

$$\tilde{x}^{\mu} = (\tau, 0, 0, 0)$$

- 計量は座標変換不変なので，次式が成立する。

$$\eta_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = \eta_{\alpha\beta}\tilde{x}^{\alpha}\tilde{x}^{\beta} = -1(d\tau)^2 + 0 + 0 + 0 = -(d\tau)^2$$

- p^{μ} の計量は，

$$\begin{aligned}\eta_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta} &= m^2\eta_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} = m^2\eta_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} \\ &= m^2\frac{\eta_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}}{(d\tau)^2} = m^2\frac{-(d\tau)^2}{(d\tau)^2} = -m^2\end{aligned}$$

と，一定値$(-m^2)$になる。

- p^0は何を意味しているのか？
  前の式から,
  $$-(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = -m^2$$
  が得られる。従って,
  $$\begin{aligned} p^0 &= \sqrt{m^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2} \\ &= m + \frac{(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2}{2m} + \cdots \\ &= m + \frac{1}{2} m\gamma^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 + \cdots \end{aligned}$$
  となる。速度が遅いときには，$\gamma \simeq 1$なので，この第2項は運動エネルギーを表わしていることになる。
- p^0はエネルギーを表わしていると考えることができる。
- 光速cを省略して($c = 1$として)書いているが，省略しないと,
  $$cp^0 = \sqrt{m^2c^4 + ((p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2)c^2} = mc^2 + \frac{1}{2} m\gamma^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 + \cdots$$
  のようになり，cp^0がエネルギーを表わしていることになる。

- $\|\boldsymbol{p}\| = 0$としても残るエネルギー$E = mc^2$が，静止エネルギーである。
- これは質量がエネルギーと等価であること，すなわち，質量がエネルギーに変わることを示している。
- そして，この式によって，原子核の結合エネルギーが計算できるようになった。
- 一般に，原子の質量はそれを構成している，陽子・中性子・電子の質量を加えたよりも軽い。
- その質量の差が結合エネルギーとなる。
- 簡単な例を見てみてみる。同じ質量mの2つの粒子が，それぞれ，

$$p_1^\mu = \left(\sqrt{m^2 + a^2}, a, 0, 0\right), \qquad p_2^\mu = \left(\sqrt{m^2 + a^2}, -a, 0, 0\right)$$

という4次元運動量を持っているとする。これは，同じ速さで逆方向から正面衝突する状況を考える。

  - 2つの粒子は衝突して，1つの粒子になり静止するとする。
  - 4次元運動量の保存則より，結合した粒子の4次元運動量p^μは，

$$p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = \left(2\sqrt{m^2 + a^2}, 0, 0, 0\right)$$

となる。

- 結合した粒子の質量をMとおけば,

$$M^2 = \left(2\sqrt{m^2 + a^2}\right)^2 - 0^2 - 0^2 - 0^2$$

より，$M = 2\sqrt{m^2 + a^2}$となる。

- これは，粒子の質量が，衝突前の2つの質量の和$2m$でなく，$2\sqrt{m^2 + a^2}$と重くなっている。
- 運動エネルギーが質量に転換されたことを意味している。
- 原子核の質量を正確に測ることによって，$E = mc^2$から，原子核が融合したとき，分裂したときに発生するエネルギーが計算できるようになった。
- 原子爆弾は$E = mc^2$がなければできなかったかもしれないが，$E = mc^2$から原子爆弾ができたわけではない。
- ローレンツ変換する4次元運動量(=(エネルギー，運動量))が保存するためには，エネルギーと質量が互いに他に変換できる必要がある。

16　エネルギー・運動量テンソル

- 質点ではなく，物体が空間に広がっている場合を考える。
- 流体のように，物体は各点で速度を持っているものとする。
- 次の定義を与える。

  $\rho(x)$：物体の各点における質量密度

  　座標系によって長さが変化し密度が変化するので，質量密度は
  　物体といっしょに動いて測るものとする。

  $u^\mu(x)$：4次元速度ベクトル場
- エネルギー・運動量テンソルの定義：

$$T^{\mu\nu}(x) = \rho(x)u^\mu(x)u^\nu(x)$$

- 保存則が成立する。

$$\partial_\alpha T^{\alpha\mu} = 0$$

  これは連続の式 (ρ：物質密度，$\boldsymbol{v}$：流れ) に対応している。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

- 物体の座標x^μと書いたとき，x^0は観測している座標系において，その物体を扱うときの時間である。
- 固有時τは，物体と共に動く座標系におけるその物体の時間である。
- 物体が空間的には原点にある物体と共に動く座標系では，ローレンツ変換から次の式が成立する。

$$t = \gamma\tau$$

- ここで，$\gamma = 1/\sqrt{1 - \|\boldsymbol{v}\|^2}$であり，$\boldsymbol{v}$は$x^\mu$座標系での速度である。
- 従って，次式が成立する。

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

- これは，ローレンツ収縮の逆数となっている。
- $\gamma = u^0 = p^0/m$が成立する。
  従って，それぞれは単位質量あたりのエネルギーになる。
  ローレンツ収縮のために観測座標系から見た密度がγ倍だけ高くなっている。
- 静止座標での密度は，ローレンツ収縮より$\gamma\rho(x)$となる。

- 以上より，$T^{\mu\nu}$ に関して次のことがわかる。
  - $T^{00} = \gamma^2 \rho(x)$：全エネルギー密度
  - $T^{0i} = \gamma \rho(x) u^i$：運動量密度
  - $T^{ij} = \rho(x) u^i u^j$：(連続体の応力テンソル) (ここで，$i = 1, 2, 3$)

17 Einsteinの重力場の方程式

- 重力場の方程式のために，ニュートン力学や特殊相対性理論の類推から，Einsteinは次の３つの条件を考えた。
  - 方程式は一般座標変換に対してテンソルの型で書かれること。
    ⇒座標変換に対して方程式が共変(方程式の形を変えない)になる。
  - $g_{\mu\nu}(x)$の最高2階の微分を含み，それについて線形であること。
  - 方程式の右辺は物質のエネルギー・運動量テンソルであること。
- Minkowski時空では，エネルギー・運動量テンソル$T^{\mu\nu}$に対して，次式が成立する。

$$\partial_\nu T^{\nu\mu} = 0$$

- 一般座標変換のもとでは，次式が成立する。

$$\nabla_\nu T^{\nu\mu} = 0 \tag{53}$$

- 重力場の方程式の左辺も，同じ性質を持つ必要がある。

- $R^{\mu}_{\ \nu\alpha\beta}$ をRiemannの曲率テンソルとし，以下の定義を与える。
  - Ricciテンソル：$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$
  - Ricciテンソル(反変)：$R^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta}$
  - スカラー曲率： $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$
- Einsteinテンソルを次のようにおく。

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$$

- このとき，次式が成立する。

$$\nabla_\nu G^{\nu\mu} = 0$$

  これは，エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ が満たしていた条件(53)である。
- また，同様に次式も成立する。

$$\nabla_\nu g^{\nu\mu} = 0$$

- 式(53)の条件を満たす2階のテンソルは，この2つしかない。

- 従って，Einsteinは，重力場の方程式を，定数λ, κに対して，

$$G^{\mu\nu} + \lambda g^{\mu\nu} = -\kappa^2 T^{\mu\nu} \tag{54}$$

  で与えた。
- 式(54)はλが宇宙項で，真空が持っているエネルギーを表わしている。
  - この項がないと，宇宙が膨張するか縮小する解しかななくなるため，定常宇宙を実現するために導入した。
  - 後で，宇宙が膨張していると知って，Einsteinがこの項を導入したことについて「人生最大の誤り」と言ったとのこと。
    Einsteinをもってしても，永遠に続かない非定常な宇宙を想像できなかった。
  - 現在でも，普通は0にして話を進める。
  - 宇宙の創世紀には正だったと言われている。(インフレーション)
  - 現在でも僅かに正(or もっと最近では負)とも言われている。
    (いいかげんだなー。宇宙論)

17.1　Newton近似

- 惑星の運動など，通常の状況では，Newtonによる重力場と運動方程式は，かなり正確な物体の運動を与える。

⇒ Einsteinの重力場の方程式と測地線上の運動も，ある一定の条件下では，Newtonによる重力場と運動方程式から導かれる運動で近似できる必要がある。

- まず，$g_{\mu\nu}$が与えられたとして，物体の運動をNewton近似で与える。(場ではなく，場($g_{\mu\nu}$)が決まったときの運動の方を先に求める。)
- Newton近似の条件は以下の通りである。

1. 重力場は強くない。($g_{\mu\nu}$が$\eta_{\mu\nu}$に近い)
2. 重力場は時間的に変化しない(時間微分はすべて0)。
3. 速度は遅い。

- 条件1. より，次の$h_{\mu\nu}(x)$の2次以上の項($h_{\mu\nu}h_{\alpha\beta}$など)は無視する(微分されていても無視する)。

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x)$$

- Einsteinの理論では，物体は測地線上を動く。次式が測地線の方程式である。

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}=0$$

- 測地線のパラメータτを，固有時で表わすものとする。
  (固有時で表したため，式(52)で$f=0$とおくことができる。)
- すると，ニュートンの運動方程式の類推から，

$$F^i=-\frac{1}{m}\Gamma^i_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\qquad(i=1,2,3)$$

  が，i方向の力を表わしていることがわかる。
- ここで，

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}=p^\mu$$

  より，速度が遅い場合は，$p^0(\simeq\sqrt{m})$以外の項は無視できる。

- Levi-Chivita接続を使い，$\Gamma^i_{\nu\lambda}$ を $h_{\mu\nu}$ で表し，F^i を計算すれば,

$$F^i = -\frac{1}{m}\Gamma^i_{00}p_0p_0 = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}$$

  となる。
- これは重力ポテンシャルが，次式で表わされていることを意味している。(ポテンシャルの微分が力)

$$\Phi = -\frac{1}{2}h_{00}$$

- 運動方程式は,

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \partial_i\Phi = 0$$

  となり，Newtonの運動方程式と同じ形が得られた。
- あとは，Einsteinの重力場の方程式から求まる $-\frac{1}{2}h_{00}$ が，Newtonの重力場と近似的に一致すれば良い。

- それでは重力場の方程式の方に話を移す。
- 物質の状態密度を$\rho(x)$とする。
- エネルギー運動量テンソルを考えると，速度が遅いために，T^{00}だけが主要な項になる。
- 速度が遅いため$\gamma \simeq 1$となり，T^{00}は次式で与えられる。

$$T^{00} = \rho(x)$$

- 次に，Ricciテンソル$R_{\mu\nu}$は，以下のようになる。

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \Gamma^\beta_{\nu\mu}\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\nu\beta}$$

- Levi-Chivita接続の定義より，以下のようになる。

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\mu h_{\beta\nu} + \partial_\nu h_{\beta\mu} - \partial_\beta h_{\mu\nu})$$

($h_{\mu\nu}$に関する2次以上の項は略している。)

- これを代入すれば，次式が得られる。

$$R_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2}\Big((\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta)h_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu(\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}) - \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\mu h_{\beta\nu} - \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\nu h_{\beta\mu}\Big)$$

  - $\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$ はD'Alembertian(ダランベーリアン)と呼ばれる演算子
  - $\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$ は $h_{\alpha\beta}$ のトレースと呼ばれる。
- ラプラシアン $\Delta = \partial_1\partial_1 + \partial_2\partial_2 + \partial_2\partial_2$ を定義する。
- 上式から，R_{00} を計算すると次のようになる。

$$R_{00} \simeq \frac{1}{2}\Delta h_{00} \tag{55}$$

- Einsteinの重力場の方程式の右から $g_{\mu\nu}$ をかけて縮約すれば,

$$g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R = -\kappa^2 g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$$

  となる。4次元空間を考えているので，$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$ となり，$R = \kappa^2 g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ が成立する。
- 従って，Einsteinの重力場の方程式は，次のように変形される。

$$R^{\mu\nu} = -\kappa^2\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}\right)$$

- T_{00}以外は0とおける。$h_{\mu\nu}$の2次以上の項を無視していて，すでにR_{00}が$h_{\mu\nu}$の1次であるから，$g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}$とおけるので，次式が成立する。

$$R_{00}=-\kappa^2\left(T^{00}-\frac{1}{2}\eta^{00}\eta_{00}T^{00}\right)=-\frac{1}{2}\kappa^2T^{00}$$

- 式(55)と併せて，$\Phi=-h_{00}/2$ とおいて次の方程式が完成する。

$$\Delta\Phi\simeq\frac{1}{2}\kappa^2\rho(x) \tag{56}$$

- これは，Poisson方程式であり，ニュートン力学と同じ形になる。
- Newton力学における，重力ポテンシャルΦは次式で与えられる。

$$\Delta\Phi=4\pi G\rho(x)$$

(Gは万有引力定数),
- 式(56)とΦは，光速cをつけて計算すれば次のようになる。

$$\Delta\Phi\simeq-\frac{1}{2}c^4\kappa^2\rho(x)$$
$$\Phi=-\frac{1}{2}c^2h_{00}/2$$

- 通常の条件下では，Einsteinの重力場の方程式とNewtonの重力場の方程式が同じ形になることが示された。
- さらに，Newtonの重力場の方程式から，Einstein重力場の方程式のパラメータκ^2を求めることができる。すなわち，

$$4\pi G = \frac{1}{2}c^4\kappa^2$$

が成立しなくてはいけないため，次式のようにκ^2が求まる。

$$\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$$

- 最終的な重力場の方程式は次のようになる。

$$G^{\mu\nu} + \lambda g^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$

- 計量について説明を加える。4次元座標がdx^μ変化したときの計量

$$(d\tau)^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

の$d\tau$は固有時の変化を表わす。

18　Schwarzschildの解

- 概略だけ示す(かなり複雑)。
- 第一次世界大戦の前線で解を求め，アインシュタインに手紙を送った。その後，戦争で病死した。
- 物体外部における静的点対称の場合の厳密解(星の外などで使える)
- 外部解とは物質がない場所，すなわち$T^{\mu\nu} = 0$における解のこと
- この条件から，$R_{\mu\nu} = 0$が成立する。
- $R_{\mu\nu} = 0$の場合でも空間は曲っている。($R^{\mu}_{\ \nu\alpha\beta} = 0$ならば平坦となる。)
- 静的点対称では，計量が時間的に変化しない原点対称であることを仮定する。例としては，星が原点にあって，その周りの真空の空間における重力を求めていることになる。
- まず，静的点対称な計量を

$$(ds)^2 = -a(r)(d\omega)^2 + b(r)(dr)^2 + r^2(d\Omega)^2$$

とき，Einsteinの重力場の方程式(今の場合：$R^{\mu\nu} = 0$)から，$a(r)$，$b(r)$を求める。ここで，ωは時間，Ωは次式で与えられる立体角

$$(d\Omega)^2 = (d\theta)^2 + \sin\theta(d\phi)^2$$

- この式のrは半径を表わしていることはわかると思うが，どのように計った半径を表わしているか考える。
  - この半径は，原点から等距離の円周を１周まわったときの長さがlのとき，$l/2\pi$としている。
  - 原点，点A，点Bが同一直線上にあり，A，Bのこの半径をr_A，r_B $(r_B > r_A)$とするとき，AとBの距離は$r_B - r_A$か？
    (答) 違う。その距離は，以下の式で与えれる。

$$\int_{r_A}^{r_B} b(r)dr$$

  - 従って，ここでの半径rは，原点とAやBの間の距離を直接計ったものではないことに注意しておくこと。
- $a(r), b(r)$を求めると，計量は次のようになる。

$$(ds)^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)(d\omega)^2 + \frac{1}{1 - a/r}(dr)^2 + r^2(d\Omega)^2$$

  ここで，aは定数(Schwarzschild半径)

- $r < a$では計量の係数の符号が反転し，おかしなことが生じる。
- $-c^2 h_{00}/2$は重力ポテンシャルであったので，$1/r$の係数から，Schwarzschild半径aを，中心物体の質量をmで表わすことができる。

$$a = \frac{2Gm}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.7 \times 10^{-11}}{(3.0 \times 10^8)^2} m = 1.5 \times 10^{-27} m$$

- 例えば，太陽の質量があったとしても，そのSchwarzschild半径は,

$$7.4 \times 10^{-28} m \times 2.0 \times 10^{30} = 3 \times 10^3$$

  と，約3kmになる。
- 実際の太陽の半径は70万kmである。太陽を長さ比で23万分の１に圧縮すると，Schwarzschild半径以内の自由な領域ができる。
- このような状況(質量がSchwarzschild半径より内側に集まっている)が達成されているものが，いわゆるブラックホールである。

18.1　太陽の側を通る光の軌道

- 光の軌道も，測地線で与えられる。
- 中心を通る平面((r,ϕ)座標系)における測地線の方程式に変形する。
- rに対して，次の変数変換を行なう。

$$u = \frac{1}{r}$$

- このとき，直線は，l，αはパラメータとして，次のように表わされる。

$$u = \frac{\sin(\phi - \alpha)}{l}$$

これは，傾き$y = (\tan\alpha)x + l/\cos\alpha$という直線を表わしている。

- 変数変換により，固有時に関する微分をϕに関する微分に置き換えると，測地線の方程式は次のようになる(接続を計算など，4ページぐらいの計算が必要)。

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3}{2}au^2 \tag{57}$$

- これを近似的に解く。解として次式を仮定する。

$$u(\phi) = b_1 + \frac{1}{l}\sin\phi + b_2 \sin^2\phi$$

- これを測地線の方程式式(57)に代入し，b_1 と b_2 を求める。このとき，$\sin\phi$ の3次以上の項は無視する。
- 無限遠では，$u = 1/r = 0$ となる。求まった解に $u = 0$ を代入すれば $\sin\phi$ の2次方程式が得られる。
- その ϕ に関する近似的解は以下のと通りである。

$$\phi = -a/l, \pi + a/l$$

- すなわち，光は $-a/l$ の方向からやってきて，$\pi + a/l$ の方向へ向かうことを示している。
- 光が，光が $2a/l$ だけ曲ることになる。
- 太陽すれすれに通るとすれば，1.75秒(1.75/3600度)になる。
- 1919年の日食において，太陽のすぐそばに見える星の光を調べ，光が曲がっていることが確認された。その結果，一般相対性理論が正しいものと考えられるようになった。

18.2　運動

- 固有時τ(物体と共に動く座標系の時間)で考える。
- 測地線の方程式の解を$x^\mu(\omega)$とおく。これは，静止している座標系の時間ωで表わしている。
- このとき，$x^0(\omega)$はその物体の固有時τである。
- 固有時をパラメータとした測地線の方程式の$\mu = 0$に関する式を使って，

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{1 - a/r}$$

が成立する。

- この関係から，固有時における運動方程式は次式のようになる。

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{Gm}{c^2 r^2}$$

- これは，通常のNewtonの運動方程式と同じ形である。
- しかも，$r = a$には関係していない。

⇒ 落ちていく物体は普通に，落ちているように感じることになる。

18.3 Schwarzschild半径の内側の運動

- Schwarzschild半径の内側の運動を考える。
- 解析接続を使って座標変換する。

$$u=\sqrt{1-\frac{r}{a}}\,e^{r/(2a)}\sinh\frac{\omega}{2a},\quad v=\sqrt{1-\frac{r}{a}}\,e^{r/(2a)}\cosh\frac{\omega}{2a} \tag{58}$$

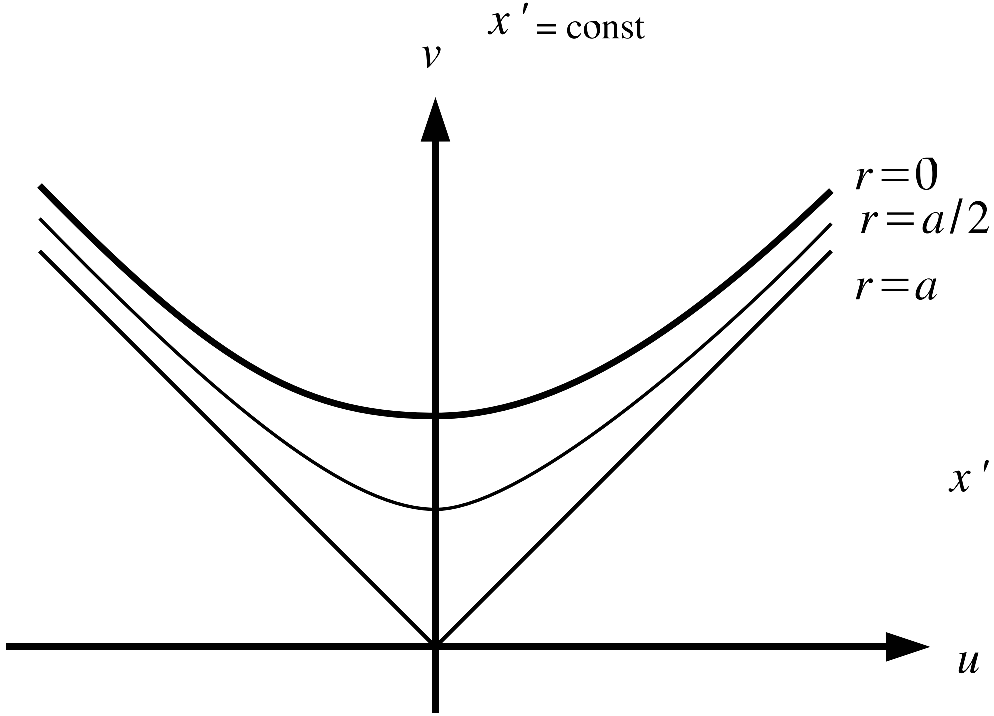
  - 解析接続とは，実数関数として不連続がある場合，それを回避して結果を得る方法のこと。
  - 例えば，$1/r$に対する0の不連続点に対して，$1/(r+i\varepsilon)$を考え，複素数を使って0で割ることを回避する。
  - その式を使って計算し，結果を出した後に$\varepsilon\to 0$とするもの。
  - $\varepsilon\to 0$で結果が収束する必要がある。発散してしまうようならば解析接続の利用は失敗ということになる。
- 計量は次のようになる。

$$(ds)^2=\frac{4a}{r}e^{r/a}\{-(dv)^2+(du)^2\}+r^2(d\Omega)^2$$

- 計量の各項の符号を見ると，この座標ではvが時間を表わすことがわかる。

- 右図は，rが一定の曲線を，(u,v)座標系に書いたものである。
- (u,v)座標系で$r = 0$は，ωをパラメータとして，以下の曲線で表わされている。

$$u = \sinh\frac{\omega}{2a}$$
$$v = \cosh\frac{\omega}{2a}$$



- それ以外のrが一定曲線は，式(58)で，rを一定にして表わされる。
- この座標系ではvが時間なので，物体は光速を超えないでvが大きくなる方向に進む。
- すなわち，物体はv軸から角度$\pm\pi/4$で，上方に上がっていくことしかできない。
- 図を見ればわかるように，rが0に近づいて行いく。
- 落ちて行く解しかなく，光すら脱出できないことがわかる。

19　まとめ

- 多様体と，その応用として一般相対性理論を紹介した。
- 理論的研究において，線形なものはやりつくした感がある。
- 普通の非線形処理はヒューリスティックなものしかない。
- 理論としては，多様体を使うものが増えてくると思う。
- 特に，甘利先生の情報幾何学が極めて有名

20　多様体を使っている正規分布の研究(全く有名ではない)

- 幾何学局所独立方程式(Mahalanobis 計量方程式) ⇒ 座標変換不変
  - ユークリッド空間，超球面，ロバチェフスキー空間における解析解
- 上式より導かれるMahalanobis計量方程式を与えた。

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \log(p/\sqrt{g}) = l g_{\mu\nu}$$

  - $l = -1$ (ユークリッド空間)
  - $l = -\log(p/\sqrt{g})$ (超球面)
  - $l = \log(p/\sqrt{g})$ (ロバチェフスキー空間)
- 数値計算でMahalanobis計量を求めた。

20.1　これからのテーマ

- 境界条件と解
- サンプル点から求めるMahalanobis計量
- curved 正規分布の性質

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{\|f(x)-\alpha\|^2/2} \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)$$

- 時間的変化を考える(うまくいけば経済予測に使え，大儲け。(まあ，世の中そんなには甘くないが))
  - とりあえず，飯嶋先生の画像の基礎方程式を拡張したものを目指す?
  - 時間方向は独立でなく従属なので，単純な拡張ではうまくいかない。(ローレンツ不変な幾何学的局所等方独立方程式など)
  - ラグラジアンorハミルトニアンに幾何学的局所等方独立性の概念を導入する。(もってけ，経路積分)
  - 時間の特徴付け：最後は時間とは何だろうという問題になる。(時間とゲージ変換って似ている気がするのだが，何か特徴付けに利用できないかな？)