

線形システム論演習 (第 14 回目)

学科・類： \_\_\_\_\_ 学籍番号： \_\_\_\_\_ 名前： \_\_\_\_\_

授業中に配布した用紙でない場合は、「コピー」と右上に大きく書くこと。  
用紙が足りないときは、裏面を使ってよい。

問 1. 次の  $n \geq 0$  で定義された関数を  $z$  変換せよ。

(1) 1

$$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

(2)  $3^n$

$$\frac{1}{1-3z^{-1}} = \frac{z}{z-3}$$

(3)  $\sin 3n$

$$\frac{z \sin 3}{z^2 - 2z \cos 3 + 1}$$

(4)  $\cos 4n$

$$\frac{z(z - \cos 4)}{z^2 - 2z \cos 4 + 1}$$

(5)  $n$  (ヒント: 1 の  $z$  変換を,  $z$  で微分して, 符号を変えて,  $z$  倍することを考える。)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1}$$

を,  $n$  で微分して, 符号を変えて,  $z$  倍すれば, 次式が成立する。

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

問 2. 次の関数を留数定理を使って逆  $z$  変換せよ。

$$F(z) = \frac{z^2 - z + 2}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{3}\right)}$$

ヒント:  $F(z)z^{n-1}$  の極および位数が,  $n = 0$ ,  $n \geq 1$  の場合で異なるので, 場合分けをして考える (特に綺麗な答えにはならない)。

$f(n)$  は,  $F(z)z^{n-1}$  の留数の和となる。

$n \geq 1$  のとき,  $F(z)z^{n-1}$  の極は  $z = 1/2$ ,  $z = -1/3$  であるから, 次のようになる。

$$\begin{aligned} f(n) &= \lim_{z \rightarrow 1/2} \left(z - \frac{1}{2}\right) F(z)z^{n-1} + \lim_{z \rightarrow -1/3} \left(z + \frac{1}{3}\right) F(z)z^{n-1} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 2}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 2}{\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\frac{1-2+8}{4}}{\frac{5}{6}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{\frac{1+3+18}{9}}{\frac{5}{6}} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{21}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{44}{15} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{21}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{44}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

$n = 0$  のとき、 $F(z)z^{n-1}$  は、 $z = 0$ 、 $z = -1/3$ 、 $z = -1/2$  に 1 位の極を持つ。このとき、 $z = -1/3$ 、 $z = -1/2$  の留数は  $n \geq 1$  のときに求めた式に、 $n = 0$  を代入したものに等しいから、

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} zF(z)z^{-1} + \frac{21}{5} + \frac{44}{5} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - z + 2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)} + \frac{21}{5} + \frac{44}{5} \\ &= \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{21}{5} + \frac{44}{5} = 1 \end{aligned}$$

となる。