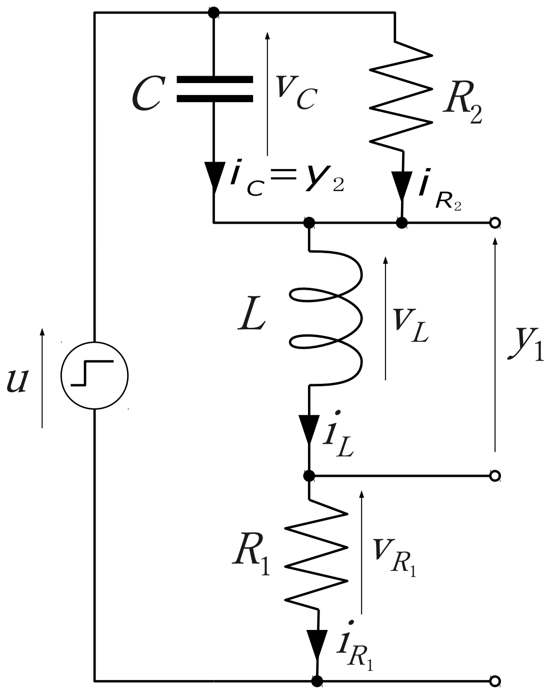
線形システム論演習 (第１１回目)

学科・類：　　　　　　学籍番号：　　　　　　名前：

授業中に配布した用紙でない場合は,「コピー」と右上に大きく書くこと。
用紙が足りないときは，裏面を使ってよい。

問１．右図のように，電圧源，コイル L と抵抗 R_2 が並列に接続されたもの，コンデンサ C，抵抗 R_1 が直列接続されている。時刻 t において，コイル以下それぞれの電流を $i_L(t)$，$i_{R_2}(t)$，$i_C(t)$，$i_{R_1}(t)$，かかる電圧を $v_L(t)=v_{R_2}(t)$，$v_C(t)$，$v_{R_1}(t)$ とすると次の関係が成立する。



$$
\begin{aligned}
i_C(t) &= C\frac{dv_c(t)}{dt}\\
v_L(t) &= L\frac{di_L(t)}{dt}\\
v_{R_1}(t) &= R_1\, i_{R_1}(t)\\
v_{R_2}(t) &= R_2\, i_{R_2}(t)
\end{aligned}
$$

電圧源の電圧を $u(t)$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
i_C(t)+i_{R_2}(t) &= i_L(t)=i_{R_1}(t)\\
v_L(t)+v_C(t)+v_{R_1}(t) &= u(t)
\end{aligned}
$$

が成立する。いま，出力 $y_1(t)$，$y_2(t)$ を $v_C(t)$，$i_C(t)$ とするとき，$x_1(t)=i_L(t)$，$x_2(t)=v_C(t)$ として，1 入力 2 出力 2 次のシステムの状態微分方程式と出力方程式を示しなさい (一般に LCR 回路を解析するときには，コイルの電流，コンデンサの電圧を状態変数にとる)。また，$L=\frac{1}{2}$，$C=\frac{1}{2}$，$R_1=1$, $R_2=1$, とし，$i_L(0)=0$，$v_C(0)=2$，入力 $u(t)$ をユニットステップ関数 ($u(t)=0\ (t<0)$，$u(t)=1\ (t\geq 0)$) としたときの，$t\geq 0$ における出力 $y_1(t)$，$y_2(t)$ を求めなさい (ラプラス変換を使って計算する)。

回路方程式より，

$$
\begin{aligned}
L\dot{i}_L(t) &= -R_1 i_L(t)-v_C(t)+u(t)\\
C\dot{v}_C(t) &= i_L(t)-\frac{1}{R_2}v_C(t)
\end{aligned}
$$

が成立するので，次のような状態微分方程式，出力方程式が成立する。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\end{pmatrix}u(t)\\
\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -\frac{1}{R_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}u(t)
\end{aligned}
$$

与えられた値を代入して状態微分方程式をラプラス変換すると，

$$
\begin{pmatrix}sX_1(s)\\ sX_2(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1(s)\\ X_2(s)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}\frac{1}{s}
$$

となる。従って，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s+2 & 2 \\ -2 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{2}{s} \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+2)(s+2)+4} \begin{pmatrix} s+2 & -2 \\ 2 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{s} \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{s\{(s+2)^2+4\}} \begin{pmatrix} 2(s+2)-4s \\ 4+2s(s+2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-2s+4}{s\{(s+2)^2+4\}} \\ \frac{2s^2+4s+2}{s\{(s+2)^2+4\}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので，出力のラプラス変換は，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2s+4}{s\{(s+2)^2+4\}} \\ \frac{2s^2+4s+4}{s\{(s+2)^2+4\}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{s} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2s^2+4s+4}{s\{(s+3)^2+4\}} \\ \frac{-2s-6}{(s+2)^2+4} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。次に，出力を時間関数に直す。$Y_1(s)$ を部分分数展開する。

$$
\frac{2s^2+4s+2}{s\{(s+2)^2+2\}} = \frac{A(s+2)+B}{(s+2)^2+2} + \frac{C}{s} = \frac{(A+C)s^2+(2A+B+4C)s+8C}{s\{(s+2)^2+1\}}
$$

より，$A = \frac{3}{2}$，$B = -1$，$C = \frac{1}{2}$ となる。従って，

$$
Y_1(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{3}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{(s+2)^2+4}
$$

となり，

$$
y_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t}\cos 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t
$$

となる。$Y_2(s)$ を

$$
Y_2(s) = -2\frac{s+2}{(s+2)^2+4} - \frac{2}{(s+2)^2+4}
$$

と変形すれば，

$$
y_2(t) = -2e^{-2t}\cos 2t - e^{-2t}\sin 2t
$$

となる。