

学科・類：

学籍番号：

名前：

授業中に配布した用紙でない場合は、「コピー」と右上に大きく書くこと。
用紙が足りないときは、裏面を使ってよい。

問2. 次の関数の逆ラプラス変換を、留数定理を使って計算しなさい。

(1)

$$F(s) = \frac{1}{s+2}$$

$F(s)$ は、 $s = -2$ に位数1の極を持つから次式が成立する。

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)F(s)e^{st} = e^{-2t}$$

(2)

$$F(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2}$$

$F(s)$ は、 $s = -2$ に位数2の極を持つから次式が成立する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds} \left((s+2)^2 F(s) e^{st} \right) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left((s+4) e^{st} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow -2} \left((s+4) t e^{st} + e^{st} \right) = 2t e^{-2t} + e^{-2t} \end{aligned}$$

(3)

$$F(s) = \frac{s^2 + 45s + 9}{(s+2)^2(s+3)}$$

$F(s)$ は、 $s = -2$ に位数2、 $s = -3$ に位数1の極を持つから次式が成立する。

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \\ &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds} \left((s+2)^2 F(s) e^{st} \right) + \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) F(s) e^{st} \\ &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left(\frac{s^2 + 45s + 9}{s+3} e^{st} \right) + \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s^2 + 45s + 9}{(s+2)^2} e^{st} \\ &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left(s + 42 + \frac{-117}{s+3} \right) e^{st} + \frac{(-3)^2 + 45(-3) + 9}{(-3+2)^2} e^{-3t} \\ &= \lim_{s \rightarrow -2} \left\{ \left(s + 42 + \frac{-117}{s+3} \right) t e^{st} + \left(1 - \frac{-117}{(s+3)^2} \right) 3 e^{st} \right\} - 117 e^{-3t} \\ &= \left(-2 + 42 + \frac{-117}{-2+3} \right) t e^{-2t} + \left(1 - \frac{-117}{(-2+3)^2} \right) e^{-2t} - 117 e^{-3t} \\ &= -77t e^{-2t} + 118 e^{-2t} - 117 e^{-3t} \end{aligned}$$