線形システム論演習 (第８回目)

学科・類： 学籍番号： 名前：

授業中に配布した用紙でない場合は,「コピー」と右上に大きく書くこと。
用紙が足りないときは，裏面を使ってよい。

問１．次の関数のラプラス変換を計算しなさい。

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) & (0 \le t \le 2) \\ 0 & (t < 0 \text{ or } t > 2) \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) & (t \ge 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

とおけば，

$$f(t) = g(t) - g(t-2)$$

となるので，

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\} - \mathcal{L}\{g(t-2)\} = \frac{\pi}{s^2+\pi^2} - e^{-2s}\frac{\pi}{s^2+\pi^2} = \frac{\pi(1-e^{-2s})}{s^2+\pi^2}$$

となる。

問２．次の関数の逆ラプラス変換を，部分分数展開および留数定理を使って，それぞれ計算しなさい。

$$F(s) = \frac{s^2+4s+5}{(s+2)^2(s+3)}$$

部分分数展開を使って解く。

$$F(s) = \frac{a}{(s+1)^2} + \frac{b}{(s+2)} + \frac{c}{s+3}$$

とおくと，

$$F(s) = \frac{a(s+3)+b(s+2)(s+3)+c(s+2)^2}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{(b+c)s^2+(a+5b+4c)s+(3a+6b+4c)}{(s+1)(s+2)^2}$$

より，連立方程式

$$\begin{cases} b+c &= 1 \\ a+5b+4c &= 9 \\ 3a+6b+4c &= 5 \end{cases}$$

が成立する。これを解くと，$a=1$, $b=-1$, $c=2$ となる。従って，

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+2} + 2\frac{1}{s+3}$$

となるので，この逆ラプラス変換は以下のようになる。

$$f(t) = te^{-2t} - e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

留数定理を使って解く。$F(s)$ は，$s=-2$ に 2 位，$s=-3$ に 1 位の極を持つから次式が成立する。

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \\
= \ & \lim_{s\to-2}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}\left((s+2)^2F(s)e^{st}\right)+\lim_{s\to-3}(s+3)F(s)e^{st} \\
= \ & \lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+4s+5}{s+3}e^{st}\right)+\lim_{s\to-3}\frac{s^2+4s+5}{(s+2)^2}e^{st} \\
= \ & \lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left(s+1+\frac{2}{s+3}\right)e^{st}+\frac{(-3)^2+4(-3)+5}{(-3+2)^2}e^{-3t} \\
= \ & \lim_{s\to-2}\left\{\left(s+1+\frac{2}{s+3}\right)te^{st}+\left(1-\frac{1}{(s+3)^2}\right)e^{st}\right\}+2e^{-3t} \\
= \ & \left(-2+1+\frac{2}{-2+3}\right)te^{-t}+\left(1-\frac{2}{(-2+3)^2}\right)e^{-2t}+2e^{-3t} \\
= \ & te^{-2t}-e^{-2t}+2e^{-3t}
\end{aligned}
$$