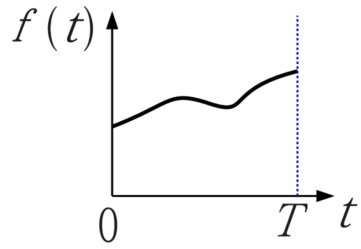
線形システム論演習 (第 6 回目)

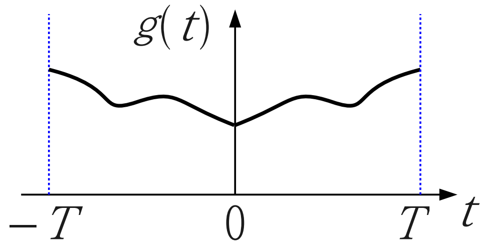
学科・類： 学籍番号： 名前：

授業中に配布した用紙でない場合は,「コピー」と右上に大きく書くこと。
用紙が足りないときは，裏面を使ってよい。

$[0, T]$ で定義された関数 $f(t)$ を考える (端点については厳密に考えなくてよい)。$g(t)$ を，$f(t)$ から次のようにして定義域を拡張した関数とする (右図参照)。



$$g(t) = \begin{cases} f(t) & (0 \le t \le T) \\ f(-t) & (-T \le t < 0) \end{cases}$$



このとき，次の問に答えよ。
1. $f(t)$ を $[0, T]$ でフーリエ級数展開するとき，その展開係数を求める式と，$f(t)$ に戻す式を書け。
2. $g(t)$ を $[-T, T]$ でフーリエ級数展開するための係数を $f(t)$ を使って表すことを考える。このとき,

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \\ d_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{\pi n t}{T}dt \end{aligned}$$

とおくと，次のように表すことができることを示せ (はじめは $[-T, T]$ の積分であるか，対称性を使って $[0, T]$ の積分に書き直す)。

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\frac{\pi n t}{T}$$

これを，コサイン級数展開と呼ぶ。
3. $[0, 2\pi]$ の関数 $f(t) = t$ を，フーリエ級数展開とコサイン級数展開によって表せ。
4. その展開式において，n が 3 までの (係数が 0 になる場合を含めて，フーリエ級数展開では 7 項 (sin と cos の項を合わせて)，コサイン級数展開では 4 項)，$t = 0.03$ のときの値 (小数点以下 2 桁程度の表示でよい) を比べよ。

1. フーリエ級数展開で，展開係数を求める式は，$n \ge 1$ で,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi n t}{T}dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi n t}{T}dt \end{aligned}$$

となる。展開式は，次のようになる。

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n t}{T} + b_n\sin\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

2. $\tau = -t$ とおけば $d\tau = -dt$ となり，$n \geq 1$ で次式が成立する。

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(t)dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{0} f(-t)dt + \frac{1}{2T}\int_{0}^{T} f(t)dt \\
&= \frac{1}{2T}\int_{0}^{T} f(\tau)d\tau + \frac{1}{2T}\int_{0}^{T} f(t)dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)dt \\
d_n &= \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} g(t)\cos\frac{2\pi nt}{2T}dt = \frac{1}{T}\int_{-T}^{0} f(-t)\cos\frac{\pi nt}{T}dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)\cos\frac{\pi nt}{T}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(\tau)\cos\frac{\pi n(-\tau)}{T}d\tau + \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)\cos\frac{\pi nt}{T}dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(t)\cos\frac{\pi nt}{T}dt \\
e_n &= \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} g(t)\sin\frac{\pi nt}{T}dt = \frac{1}{T}\int_{-T}^{0} f(-t)\sin\frac{\pi nt}{T}dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)\sin\frac{\pi nt}{T}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(\tau)\sin\frac{\pi n(-\tau)}{T}d\tau + \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)\sin\frac{\pi nt}{T}dt = 0
\end{aligned}
$$

$$
f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\frac{\pi nt}{T}
$$

3. フーリエ級数展開は，

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2T}\frac{1}{2}T^2 = \frac{T}{2} = \pi \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_{0}^{T} t\cos\frac{2\pi nt}{T}dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} t\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)' dt = \frac{1}{\pi n}\left[t\sin\frac{2\pi nt}{T}\right]_0^T - \frac{1}{\pi n}\int_{0}^{T}\sin\frac{2\pi nt}{T}dt \\
&= \frac{T}{2\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{2\pi nt}{T}\right]_0^T = 0 \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_{0}^{T} t\sin\frac{2\pi nt}{T}dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} t\left(-\frac{T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)' dt = -\frac{1}{\pi n}\left[t\cos\frac{2\pi nt}{T}\right]_0^T + \frac{1}{\pi n}\int_{0}^{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \\
&= -\frac{T}{\pi n} + \frac{T}{2\pi^2 n^2}\left[\sin\frac{2\pi nt}{T}\right]_0^T = -\frac{T}{\pi n} = -\frac{2\pi}{\pi n} = -\frac{2}{n}
\end{aligned}
$$

より，以下のようになる。

$$
f(t) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nt)
$$

また，コサイン級数展開は，

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \frac{1}{2T}\frac{1}{2}T^2 = \frac{T}{2} = \pi \\
d_n &= \frac{2}{T}\int_{0}^{T} t\cos\frac{\pi nt}{T}dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} t\left(\frac{T}{\pi n}\sin\frac{\pi nt}{T}\right)' dt = \frac{2}{\pi n}\left[t\sin\frac{\pi nt}{T}\right]_0^T - \frac{2}{\pi n}\int_{0}^{T}\sin\frac{\pi nt}{T}dt \\
&= \frac{2T}{\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{\pi nt}{T}\right]_0^T = \frac{2T}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1) = \frac{4}{\pi n^2}((-1)^n - 1)
\end{aligned}
$$

より，和は n が奇数の時だけであるので，以下のようになる。

$$
f(t) = \pi - \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{2k+1}{2}t
$$

4. $t = 0.05$ の時の値は，フーリエ級数展開とコサイン級数展開では，それぞれ，

$$
f(0.03) \simeq \pi - 2\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{n}\sin(0.03n) \simeq 2.96
$$

と

$$
f(0.03) \simeq \pi - \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{0.03(2k+1)}{2} \simeq 0.31
$$

と，コサイン級数展開の方が精度が高いことが分かる。

解答とは関係ないが，$n=10$ までの和を取ったときのそれぞれのグラフは下ようになる。ここで，青い線が $f(t)=t$ で，赤い線がコサイン級数展開，青い線ががフーリエ級数展開を表している。この場合はコサイン級数展開を使った方が正確であることがわかる。特に，フーリエ級数展開では $t=0.0$ における値を近似できていない。