線形システム論演習 (第 5 回目)

学科・類： 学籍番号： 名前：

授業中に配布した用紙でない場合は,「コピー」と右上に大きく書くこと。
用紙が足りないときは，裏面を使ってよい。

1. 下の関数 $g(t)$ の $[0, T]$ のフーリエ級数展開に関して，次の問いに答えよ。

$$g(t) = \begin{cases} T & (0 \leq t < T/2) \\ 0 & (T/2 \leq t < T) \end{cases}$$

(1) 実数表示 (cos と sin) のフーリエ級数展開の係数を求め，展開した式を示せ。

$k \geq 1$ として，

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} T dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^T (0)dt = \frac{T}{2} \\
a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} T\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt - \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^T 0\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt \\
&= \frac{2T^2}{2\pi kT}\left[\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{T}{\pi k}(0-0) = 0 \\
b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} T\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt - \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^T 0\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt \\
&= \frac{2T^2}{2\pi kT}\left[-\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{T}{\pi k}(1-\cos(\pi k)) = \frac{T}{\pi k}(1-(-1)^k)
\end{aligned}$$

となり b_n の奇数項だけが 0 でないので，$k = 2n+1$ おいて，フーリエ級数展開は次式で与えられる。

$$g(t) = \frac{T}{2} + \frac{2T}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left(\frac{2\pi(2n+1)}{T}t\right)$$

(2) 複素数表示 ($e^{\frac{2\pi ik}{T}t}$) のフーリエ級数展開の係数を求め，展開した式を示せ。

$k \neq 0$ として，

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 = \frac{T}{2} \\
c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-\frac{2\pi ik}{T}t}dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} Fe^{-\frac{2\pi ik}{T}t}dt - \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^T 0e^{-\frac{2\pi ik}{T}t}dt \\
&= -\frac{T^2}{2\pi ikT}\left[e^{-\frac{2\pi ik}{T}t}\right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{2}{2\pi ik}((-1)^k - 1)
\end{aligned}$$

となり c_n の $n = 0$ と奇数項だけが 0 でないので，$k = 2n+1$ おいて，フーリエ級数展開は次式で与えられる。

$$g(t) = \frac{T}{2} + \frac{T}{\pi i}\sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{\frac{2\pi i(2n+1)}{T}t}$$