

学科・類: _____ 学籍番号: _____ 名前: _____ [コピー]

授業中に配布した用紙でない場合は、「コピー」と右上に大きく書くこと。

用紙が足りないときは、裏面を使ってよい。

次に示す行列 A について、次の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 8.5 \end{pmatrix}$$

1. A の固有値 λ_1, λ_2 と、対応する固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を求めよ。ただし、 $\lambda_1 < \lambda_2$ とする。
2. (2,2)-行列 $P = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ に対して、 $P^{-1}AP$ を求めよ。
3. 次式で定義される e^A を求めよ。

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

1.

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 3 \\ 3 & \lambda - 8.5 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 8.5) - 3 \cdot 3 = \lambda^2 - 12.5\lambda + 25 = (\lambda - 2.5)(\lambda - 10)$$

従って、固有値は $\lambda_1 = 2.5$, $\lambda_2 = 10$ となる。

$\mathbf{u}_1 = (x_1, x_2)^T$ とおく。

$$\begin{pmatrix} -1.5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解の1つとして、 $\mathbf{u}_1 = (2, 1)^T$ をとる。同様に、

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解の1つとして、 $\mathbf{u}_2 = (-1, 2)^T$ をとる。

2.

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となり、

$$P^{-1}AP = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 8.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

となる。3.

$$\begin{aligned} \exp A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = P \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (P^{-1}AP)^n \right] P^{-1} = P \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^n \right] P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2.5^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2.5} & 0 \\ 0 & e^{10} \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{2.5} + e^{10} & 2e^{2.5} - 2e^{10} \\ 2e^{2.5} - 2e^{10} & e^{2.5} + 4e^{10} \end{pmatrix} \end{aligned}$$