線形システム論演習 (第 2 回目)

学科・類：　　　学籍番号：　　　名前：　　　[コピー]

授業中に配布した用紙でない場合は,「コピー」と右上に大きく書くこと。
用紙が足りないときは，裏面を使ってよい。

1．実空間において，$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \rangle$ を証明せよ (ヒント：成分表示で証明する)。

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y} \rangle &= \sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{n=1}^{N} A_{mn}x_n\right) y_m = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} A_{mn}x_n y_m \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} A_{mn}x_n y_m = \sum_{n=1}^{N} x_n \left(\sum_{m=1}^{M} A_{mn}y_m\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} x_n \left(\sum_{m=1}^{M} (\boldsymbol{A}^T)_{nm}y_m\right) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \rangle
\end{aligned}$$

2．次の置換を互換の積に分解し，奇置換あるいは偶置換であるか答えなさい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 2)(1\ 3)$$

は偶置換になる。

3．次の 1 次方程式の解をクラメルの公式を用いて求めよ。

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-16}{-1} = 16, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-1} = 3,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12}{-1} = -12$$