令和元年度度線形システム論 期末試験

- １問を解答用紙１枚を使って解答して下さい。裏面を使っても良いです。
- 学籍番号と氏名はすべての解答用紙に記入して下さい。
- 途中の計算も必ず書いてください。
- 配点は予定です。

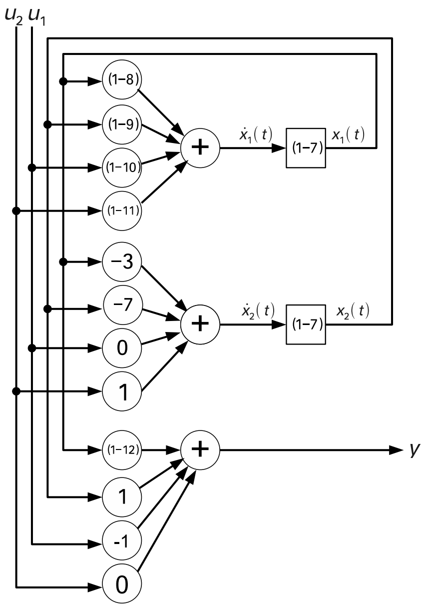
問１． 次の 2 入力 1 出力 2 次の連続時間線形システム

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \\
y(t) &= (1,\ 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + (-1,\ 0) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

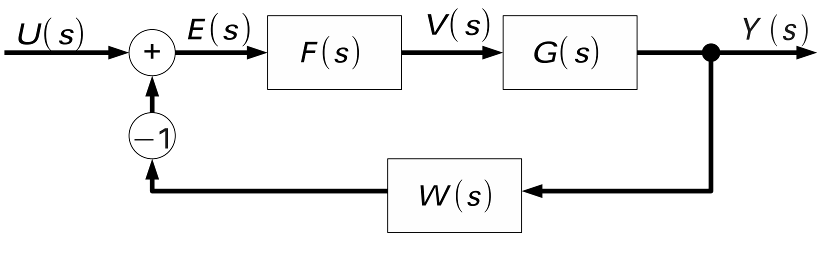
に対して，初期値と入力を，

$$
\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad u_1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-2t} & (t \geq 0) \end{cases}, \qquad u_2(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 0 & (t \geq 0) \end{cases}
$$

とする。このとき，入力 $u_1(t)$ をラプラス変換したものは $\boxed{\text{(1–1)}}$ であり，状態方程式を，初期値，入力を含めてラプラス変換したものは $\boxed{\text{(1–2)}}$ となる。これを解けば，状態変数 $x_1(t)$，$x_2(t)$ と出力 $y(t)$ をラプラス変換したものは，それぞれ，$\boxed{\text{(1–3)}}$，$\boxed{\text{(1–4)}}$ と $\boxed{\text{(1–5)}}$ となる。さらに，時間関数である出力 $y(t)$ は $\boxed{\text{(1–6)}}$ となる (留数定理を用いて求めること) また，このシステムの下記のブロック線図の空欄をうめよ。(2+4+3+3+3+5+1×6=26 点)



問２． 下図に示すフィードバック回路の入力 $U(s)$ に対する出力 $Y(s)$ は，$\boxed{\text{(2–1)}}$ となる。また下の回路の開ループゲインは，$\boxed{\text{(2–2)}}$ である。一般に，PID 制御において，比例要素の係数を A，積分要素の時定数を T_I，微分要素の時定数を T_D とすれば，その伝達関数のラプラス変換表現 $F(s) =$ $\boxed{\text{(2–3)}}$ であり，$e(t)$，$v(t)$ を，それぞれ，$E(x)$，$V(s)$ の時間領域での関数とすると，$v(t) =$ $\boxed{\text{(2–4)}}$ となる。一般に，PID 制御における積分要素の役割は，$\boxed{\text{(2–5)}}$ である。(5+5+5+5+5=25 点)



問３． z 変換に関する次の問いに答えよ。ただし，z 変換の対象となる離散時間領域の関数は $n \geq 0$ で定義されているものとする。(5+5+5+5+5+5=30 点)

(1) $f(n) = 3$ を z 変換したものは，$\boxed{\text{(3–1)}}$ となる。

(2) $f(n) = \frac{1}{3^n}$ を z 変換したものは，$\boxed{\text{(3–2)}}$ となる。

(3) $f(n) = \cos 2n$ を z 変換したものは，$\boxed{\text{(3–3)}}$ となる。

(4) $f(n) = 2^n \cos 2n$ を z 変換したものは，$\boxed{\text{(3–4)}}$ となる。

(5) $f(n) = \frac{n}{3^n}$ を z 変換したものは，$\boxed{\text{(3–5)}}$ となる。

(6) 次の関数を逆 z 変換したものは，したものは，$\boxed{\text{(3–6)}}$ となる。

$$F(z) = \frac{2z-2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}$$

問４． 次の問に答えよ。(2+1+1+2+1+1+1×11=19 点)

(1) 次の線形システムが可制御であるかどうか，可観測であるかどうか調べたい。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} u(t) \\
y(t) &= (1,\ 2,\ 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + 6 \cdot u(t)
\end{aligned}$$

このシステムの可制御性行列は $\boxed{\text{(4–1)}}$ となる。この行列のランクは $\boxed{\text{(4–2)}}$ であるから，可制御で $\boxed{\text{(4–3)}}$ (「ある」or「ない」)。

このシステムの可観測性行列は $\boxed{\text{(4–4)}}$ となる。この行列のランクは $\boxed{\text{(4–5)}}$ であるから，可観測で $\boxed{\text{(4–6)}}$ (「ある」or「ない」)。

(2) 次の方程式の解の実部がすべて負であるかどうか調べたい。

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 4s + 1 = 0$$

4 つのフルビッツ行列との主座小行列は，$H_1 = \boxed{\text{(4–7)}}$，$H_2 = \boxed{\text{(4–8)}}$，$H_3 = \boxed{\text{(4–9)}}$，$H_4 = \boxed{\text{(4–10)}}$ となり，その行列式の値は，$|H_1| = \boxed{\text{(4–11)}}$，$|H_2| = \boxed{\text{(4–12)}}$，$|H_3| = \boxed{\text{(4–13)}}$，$|H_4| = \boxed{\text{(4–14)}}$ となる。従って，方程式の多項式において すべての項の係数が $\boxed{\text{(4–15)}}$ で [あり／あるが]，フルビッツ行列の主座小行列式の値 $\boxed{\text{(4–16)}}$ から,「解の実部がすべて負である」ことは成立 $\boxed{\text{(4–17)}}$ (解答は「する」or「しない」)。

注意：配点は変更することがあります。

(1-1)

$$\frac{1}{s+2}$$

(1-2)

$$s\left(\begin{array}{c} X_1(s) \\ X_2(s) \end{array}\right)-\left(\begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ -3 & -7 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} X_1(s) \\ X_2(s) \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \frac{1}{s+2} \\ 0 \end{array}\right)$$

(1-3)

$$\left(\begin{array}{cc} s-1 & -5 \\ 3 & s+7 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} X_1(s) \\ X_2(s) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} -\frac{1}{s+2} \\ 2 \end{array}\right)$$

より，

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{c} X_1(s) \\ X_2(s) \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{cc} s-1 & -5 \\ 3 & s+7 \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c} -\frac{1}{s+2} \\ 2 \end{array}\right)=\frac{1}{(s-1)(s+7)-(-3)(5)}\left(\begin{array}{cc} s+7 & 5 \\ -3 & s-1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} -\frac{1}{s+2} \\ 2 \end{array}\right) \\ &= \frac{1}{(s+2)^2(s+4)}\left(\begin{array}{c} -1(s+7)+10(s+2) \\ -3(-1)+2(s-1)(s+2) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} \frac{9s+13}{(s+2)^2(s+4)} \\ \frac{2s^2+2s-1}{(s+2)^2(s+4)} \end{array}\right)\end{aligned}$$

となる。従って，次式が成立する。

$$X_1(s)=\frac{9s+13}{(s+2)^2(s+4)}$$

(1-4)

$$X_2(s)=\frac{2s^2+2s-1}{(s+2)^2(s+4)}$$

(1-5)

$$\begin{aligned} Y(s) &= (1,\ 1)\left(\begin{array}{c} X_1(s) \\ X_2(s) \end{array}\right)+(-1,\ 0)\left(\begin{array}{c} U_1(s) \\ U_2(s) \end{array}\right)=\frac{(9s+13)+(2s^2+2s-1)}{(s+2)^2(s+4)}-\frac{1}{s+2} \\ &= \frac{(9s+13)+(2s^2+2s-1)-(s^2+6s+8)}{(s+2)^2(s+4)}=\frac{s^2+5s+4}{(s+2)^2(s+4)}=\frac{s+1}{(s+2)^2}\end{aligned}$$

(1-6)

$Y(s)$ は，$s=-2$ に位数 2 に位数 1 の極を持つ。従って次式が成立する。

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}(s+2)^2Y(s)e^{st} \\ &= \lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}(s+1)\,e^{st} \\ &= \lim_{s\to-2}\left[(1)\,e^{st}+t\,(s+1)\,e^{st}\right] \\ &= (1)\,e^{-2t}+(-2+1)\,te^{-2t}+4e^{-4t} \\ &= e^{-2t}-te^{-2t}\end{aligned}$$

(1-7) $1/s$　(1-8) 1　(1-9) 5　(1-10) -1　(1-11) 2　(1-12) 1

(2-1)

$$Y(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)W(s)}U(s)$$

(2-2)

$$G(s)F(s)W(s)$$

(2-3)

$$A\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)$$

(2-4)

$$A\left(e(t)+\frac{1}{T_I}\int_0 te(\tau)d\tau+T_D\frac{de(t)}{dt}\right)$$

(2-5) 目標が一定値の場合，時間が十分経過すると，出力を目標と等しくなるようにする。

(3-1)

$$\sum_{n=0} 3z^{-n} = 3\sum_{n=0} 2(z^{-1})^n = \frac{3}{1-z^{-1}} = \frac{3z}{z-1}$$

(3-2)

$$\sum_{n=0} (\frac{1}{3})^n z^{-n} = \sum_{n=0} (\frac{1}{3}z^{-1})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{3}} = \frac{3z}{3z-1}$$

(3-3)

$$\sum_{n=0} (\cos 2n) z^{-n} = \sum_{n=0} \frac{e^{2in}-e^{-2in}}{2i} z^{-n} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{2i}} + \frac{z}{z-e^{-2i}}\right) = \frac{z\{z-e^{-2i}) + (z-e^{2i})\}}{2(z-e^{2i})(z-e^{-2i})} = \frac{z(z-\cos 2)}{z^2 - 2z\cos 2 + 1}$$

(3-4)

$$\sum_{n=0} (2^n \cos 2n) z^{-n} = \sum_{n=0} \cos 2n (z/2)^{-n} = \frac{(z/2)((z/2)-\cos 2)}{(z/2)^2 - 2(z/2)\cos 2 + 1} = \frac{z(z-2\cos 2)}{z^2 - 4\cos 2 + 4}$$

(3-5)

$$\sum_{n=0} n\frac{1}{3^n} z^{-n} = -z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{n} (3z)^{-n} = -z\frac{d}{dz}\frac{3z}{3z-1} = \frac{3z}{(3z-1)^2}$$

(3-6) $F(z)z^{n-1}$ の留数を計算すればよい。

$n \geq 1$ のとき，極は $z=-1/3$, $z=+1/2$ にある位数 1 の極だけである。

$$\begin{aligned} f(n) &= \lim_{z\to -1/3}\left(z+\frac{1}{3}\right)F(z)z^{n-1} + \lim_{z\to 1/2}\left(z-\frac{1}{2}\right)F(z)z^{n-1} \\ &= \lim_{z\to -1/3}\frac{2z-2}{z-\frac{1}{2}}z^{n-1} + \lim_{z\to 1/4}\frac{2z-2}{z+\frac{1}{3}}z^{n-1} \\ &= \frac{-\frac{2}{3}-2}{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{\frac{2}{2}-2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{16}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$n=0$ のとき，極は $z=0$, $z=-1/2$, $z=1/3$ にある位数 1 の極だけである。また，極 $z=-1/3$, $z=1/4$ の留数の値は，上の計算の結果に $n=0$ を代入すれば良い。従って，

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{z\to 0} z\frac{2z-2}{z\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} + \frac{16}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} - \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \\ &= 12 - \frac{48}{5} - \frac{12}{5} = 0 \end{aligned}$$

まとめると以下のようになる。

$$f(n) = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

(4-1)

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

(4-2) 3

(4-3) ある

(4-4)

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(4-5) 2

(4-6) ない

(4-7)

$$\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

(4-8)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(4-9)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(4-10)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(4-11) 3

(4-12) 5

(4-13) 11

(4-14) 11

(4-15) 正

(4-16) が正であるから

(4-17) する