平成 27 年度線形システム論 期末試験

- 1 問を解答用紙 1 枚を使って解答して下さい。裏面を使っても良いです。
- 学籍番号と氏名はすべての解答用紙に記入して下さい。
- 途中の計算も必ず書いてください。
- 配点は予定です。

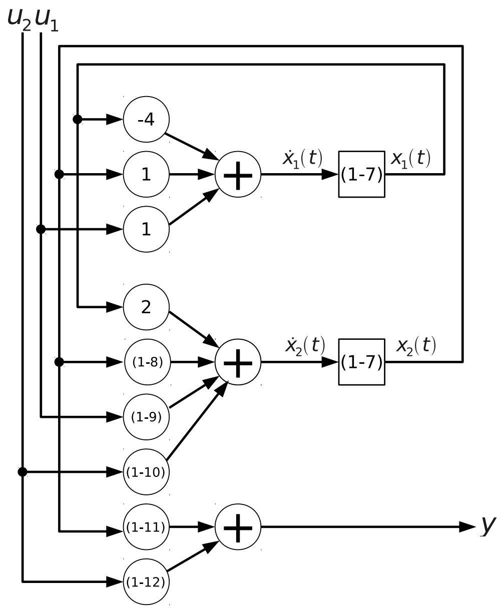
問１． 次の 2 入力 1 出力 2 次の連続時間線形システム

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \\
y(t) &= (0,\ 2) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + (0,\ -1) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

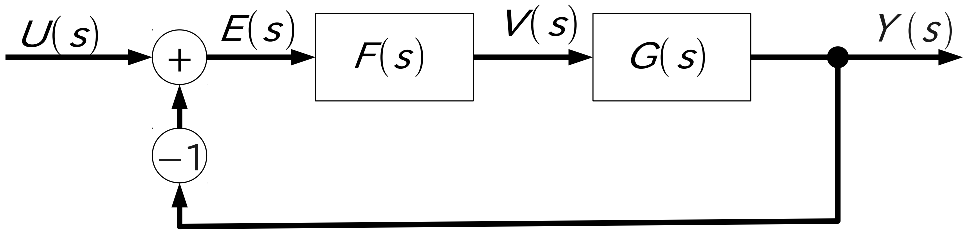
に対して，初期値と入力を，

$$
\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 0 & (t \geq 0) \end{cases}, \qquad u_2(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-2t} & (t \geq 0) \end{cases}
$$

とする。このとき，入力 $u_2(t)$ をラプラス変換したものは $\boxed{(1\text{–}1)}$ であり，状態方程式を，初期値，入力を含めてラプラス変換したものは $\boxed{(1\text{–}2)}$ となる。これを解けば，状態変数 $x_1(t)$，$x_2(t)$ と出力 $y(t)$ をラプラス変換したものは，それぞれ，$\boxed{(1\text{–}3)}$，$\boxed{(1\text{–}4)}$ と $\boxed{(1\text{–}5)}$ となる。さらに，時間関数である状態 $y(t)$ は $\boxed{(1\text{–}6)}$ となる (留数定理を用いて求めること) また，このシステムの下記のブロック線図の空欄をうめよ。(2+4+3+3+3+5+1×6=26 点)



問２． 下図に示すフィードバック回路の入力 $U(s)$ に対する出力 $Y(s)$ は，$\boxed{(2\text{–}1)}$ となる。一般に，PID 制御の制御要素のラプラス変換表現 $F(s) = \boxed{(2\text{–}2)}$ であり，$e(t)$，$v(t)$ を，それぞれ，$E(x)$，$V(s)$ の時間領域での関数とすると，$v(t) = \boxed{(2\text{–}3)}$ である。また，PID 制御で比例要素と積分要素だけ使い，入力を一定値 a としたとき，十分時間が経った後 $(t \to \infty)$ の出力を終端値の定理を使ってラプラス変換を使って表すと，$\boxed{(2\text{–}4)}$ となり，$\boxed{(2\text{–}5)}$ が 0 でなければ，出力が入力に収束する。(必要な係数は各自設定せよ) (5+5+5+5+5=25 点)



問３． z 変換に関する次の問いに答えよ。ただし，z 変換の対象となる離散時間領域の関数は $n \geq 0$ で定義されているものとする。(5+5+5+5+5+5=30 点)

(1) $f(n) = 2$ を z 変換したものは，$\boxed{\text{(3–1)}}$ となる。
(2) $f(n) = \frac{1}{2^n}$ を z 変換したものは，$\boxed{\text{(3–2)}}$ となる。
(3) $f(n) = \sin 2n$ を z 変換したものは，$\boxed{\text{(3–3)}}$ となる。
(4) $f(n) = 2^n \sin 2n$ を z 変換したものは，$\boxed{\text{(3–4)}}$ となる。
(5) $f(n) = \frac{n}{2^n}$ を z 変換したものは，$\boxed{\text{(3–5)}}$ となる。
(6) 次の関数を逆 z 変換したものは，したものは，$\boxed{\text{(3–6)}}$ となる。

$$F(z) = \frac{z-2}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

問４． 次の問に答えよ。(2+1+1+2+1+1+1×11=19 点)

(1) 次の線形システムが可制御であるかどうか，可観測であるかどうか調べたい。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} u(t) \\
y(t) &= (2,\ 3,\ 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + 2 \cdot u(t)
\end{aligned}$$

このシステムの可制御性行列は $\boxed{\text{(4–1)}}$ となる。この行列のランクは $\boxed{\text{(4–2)}}$ であるから，可制御で $\boxed{\text{(4–3)}}$ (「ある」or「ない」)。
このシステムの可観測性行列は $\boxed{\text{(4–4)}}$ となる。この行列のランクは $\boxed{\text{(4–5)}}$ であるから，可観測で $\boxed{\text{(4–6)}}$ (「ある」or「ない」)。
(2) 次の方程式の解の実部がすべて負であるかどうか調べたい。

$$s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 5s + 1 = 0$$

4 つのフルビッツ行列との主座小行列は，$H_1 = \boxed{\text{(4–7)}}$，$H_2 = \boxed{\text{(4–8)}}$，$H_3 = \boxed{\text{(4–9)}}$，$H_4 = \boxed{\text{(4–10)}}$ となり，その行列式の値は，$|H_1| = \boxed{\text{(4–11)}}$，$|H_2| = \boxed{\text{(4–12)}}$，$|H_3| = \boxed{\text{(4–13)}}$，$|H_4| = \boxed{\text{(4–14)}}$ となる。従って，方程式の多項式において すべての項の係数が $\boxed{\text{(4–15)}}$ で [あり／あるが]，フルビッツ行列の主座小行列式の値 $\boxed{\text{(4–16)}}$ から,「解の実部がすべて負である」ことは成立 $\boxed{\text{(4–17)}}$ (解答は「する」or「しない」)。

注意：配点は変更することがあります。

(1-1)

$$\frac{1}{s+2}$$

(1-2)

$$s\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

(1-3)

$$\begin{pmatrix} s+4 & -1 \\ -2 & s+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

より，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s+4 & -1 \\ -2 & s+3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+4)(s+3)-(-1)(-2)}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 2 & s+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+2)(s+5)(s+2)}\begin{pmatrix} 3(s+2)(s+3)+(1) \\ 3(s+2)2+(s+4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3s^2+15s+19}{(s+2)^2(s+5)} \\ \frac{7s+16}{(s+2)^2(s+5)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。従って，次式が成立する。

$$X_1(s) = \frac{3s^2+15s+19}{(s+2)^2(s+5)}$$

(1-4)

$$X_2(s) = \frac{7s+16}{(s+2)^2(s+5)}$$

(1-5)

$$\begin{aligned} Y(s) &= (0,\ 2)\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} + (0,\ -1)\begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} = \frac{2(7s+16)}{(s+2)^2(s+5)} + \frac{2}{s+2} = \frac{2(7s+16)-(s^2+7s+10)}{(s+2)^2(s+5)} \\ &= \frac{-s^2+7s+22}{(s+2)^2(s+5)} \end{aligned}$$

(1-6)

$Y(s)$ は，$s=-2$ に位数 2，$s=-5$ に位数 1 の極を持つ。従って次式が成立する。

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}(s+2)^2Y(s)e^{st} + \lim_{s\to-5}(s+5)Y(s)e^{st} \\ &= \lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left(-s+12-\frac{38}{s+5}\right)e^{st} + \lim_{s\to-5}\frac{-s^2+7s+22}{(s+2)^2} \\ &= \lim_{s\to-2}\left[\left(-1+\frac{38}{(s+5)^2}\right)e^{st} + t\left(-s+12-\frac{38}{s+5}\right)e^{st}\right] + \frac{-(-5)^2+7(-5)+22}{(-5+2)^2}e^{-5t} \\ &= \left(-1+\frac{38}{9}\right)e^{-2t} + \left(2+12-\frac{38}{3}\right)te^{-2t} + \frac{-38}{9}e^{-5t} \\ &= \frac{29}{9}e^{-2t} + \frac{4}{3}te^{-2t} - \frac{38}{9}e^{-5t} \end{aligned}$$

(1-7) $1/s$ (1-8) -3 (1-9) 2 (1-10) 1 (1-11) 2 (1-12) -1

(2-1)

$$Y(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}U(s) = \frac{1}{1+\frac{1}{G(s)F(s)}}U(s)$$

(2-2)

$$K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)$$

(2-3)

$$K_P\left(e(t)+\frac{1}{T_I}\int_0 te(\tau)d\tau + T_D\frac{de(t)}{dt}\right)$$

(2-4)

$$\lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s}{1+\frac{1}{G(s)K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}\right)}}\frac{a}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{a}{1+\frac{s}{G(s)K_P\left(s+\frac{1}{T_I}\right)}}$$

(2-5) $G(0)$

(3-1)

$$\sum_{n=0} 2z^{-n} = \sum_{n=0} 2(z^{-1})^n = \frac{2}{1-z^{-1}} = \frac{2z}{z-1}$$

(3-2)

$$\sum_{n=0} (\frac{1}{2})nz^{-n} = \sum_{n=0} (\frac{1}{2}z^{-1})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

(3-3)

$$\sum_{n=0} (\sin 2n)z^{-n} = \sum_{n=0} \frac{e^{2in}-e^{-2in}}{2i}z^{-n} = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-e^{2i}} - \frac{z}{z-e^{-2i}}\right) = \frac{z\{z-e^{-2i}-(z-e^{2i}\}}{2i(z-e^{2i})(z-e^{-2i})} = \frac{z\sin 2}{z^2-2z\cos 2+1}$$

(3-4)

$$\sum_{n=0} (2^n \sin 2n)z^{-n} = \sum_{n=0} \sin 2n(z/2)^{-n} = \frac{(z/2)\sin 2}{(z/2)^2-2(z/2)\cos 2+1} = \frac{2z\sin 2}{z^2-4z\cos 2+4}$$

(3-5)

$$\sum_{n=0} n\frac{1}{2^n}z^{-n} = -z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{n}(2z)^{-n} = -z\frac{d}{dz}\frac{2z}{2z-1} = \frac{2z}{(2z-1)^2}$$

(3-6) $F(z)z^{n-1}$ の留数を計算すればよい。

$n \geq 1$ のとき，極は $z=-1/3$, $z=+1/4$ にある位数 1 の極だけである。

$$\begin{aligned} f(n) &= \lim_{z\to -1/3}\left(z+\frac{1}{3}\right)F(z)z^{n-1} + \lim_{z\to 1/4}\left(z-\frac{1}{4}\right)F(z)z^{n-1} \\ &= \lim_{z\to -1/3}\frac{z-2}{z-\frac{1}{4}}z^{n-1} + \lim_{z\to 1/4}\frac{z-2}{z+\frac{1}{3}}z^{n-1} \\ &= \frac{-\frac{1}{3}-2}{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{\frac{1}{4}-2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$n=0$ のとき，極は $z=0$, $z=-1/2$, $z=1/3$ にある位数 1 の極だけである。また，極 $z=-1/3$, $z=1/4$ の留数の値は，上の計算の結果に $n=0$ を代入すれば良い。従って，

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{z\to 0} z\frac{z-2}{z\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} + 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} - 3\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \\ &= 24-12-12=0 \end{aligned}$$

まとめると以下のようになる。

$$f(n) = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

(4-1)

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4-2) 3

(4-3) ある

(4-4)

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 13 \\ 3 & 8 & 21 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(4-5) 2

(4-6) ない

(4-7)

$$\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$$

(4-8)

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(4-9)

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(4-10)

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(4-11) 4

(4-12) 3

(4-13) -1

(4-14) -1

(4-15) 正

(4-16) に負のものが存在する

(4-17) しない