平成 27 年度線形システム論 期末試験

問1． 次の 2 入力 1 出力 2 次の連続時間線形システム

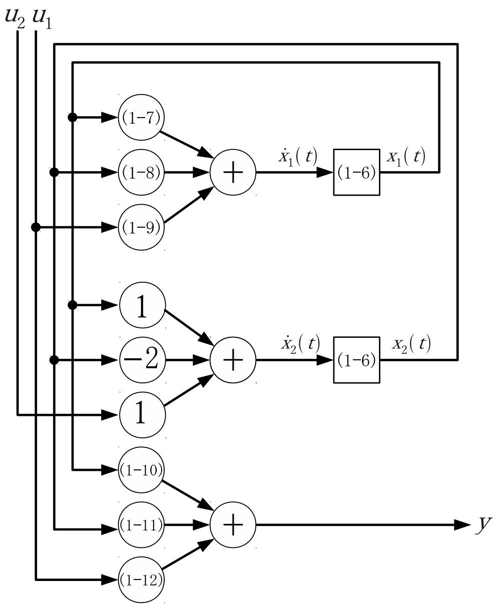
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (-1,\ -1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + (1,\ 0) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

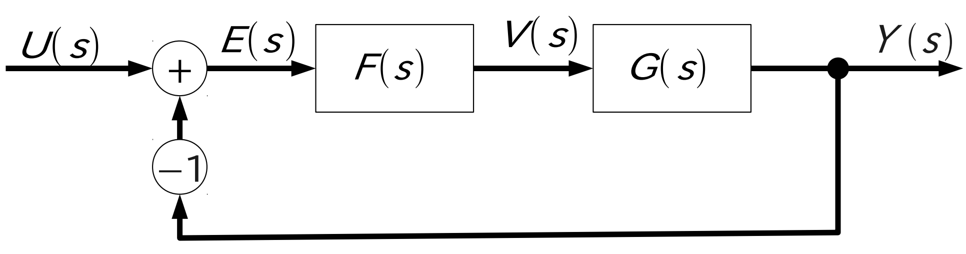
に対して，初期値と入力を，

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_1(t) = \begin{cases} 3e^{-t} & (t < 0) \\ 0 & (t \geq 0) \end{cases}, \quad u_2(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 0 & (t \geq 0) \end{cases}$$

とする。このとき，入力 $u_1(t)$ をラプラス変換したものは $\boxed{\text{(1–1)}}$ であり，状態方程式を，初期値，入力を含めてラプラス変換したものは $\boxed{\text{(1–2)}}$ となる。これを解けば，状態変数 $x_1(t)$，$x_2(t)$ と出力 $y(t)$ をラプラス変換したものは，それぞれ，$\boxed{\text{(1–3)}}$，$\boxed{\text{(1–4)}}$ と $\boxed{\text{(1–5)}}$ となる。さらに，時間関数である状態 $x_1(t)$ は $\boxed{\text{(1–6)}}$ となる (留数定理を用いて求めること) また，このシステムの下記のブロック線図の空欄をうめよ。(2+4+3+3+3+5+1×6=26 点)



問2． 下図に示すフィードバック回路の入力 $U(s)$ に対する出力 $Y(s)$ は，$\boxed{\text{(2–1)}}$ となる。一般に，PID 制御の制御要素のラプラス変換表現 $F(s) = \boxed{\text{(2–2)}}$ であり，$e(t)$，$v(t)$ を，それぞれ，$E(x)$，$V(s)$ の時間領域での関数とすると，$v(t) = \boxed{\text{(2–3)}}$ である。また，PID 制御で積分要素と微分要素がないとき，比例制御の係数を大きくした場合の利点は，$\boxed{\text{(2–4)}}$ であり，欠点は $\boxed{\text{(2–5)}}$ である。(必要な係数は各自設定せよ) (5+5+5+5+5=25 点)



問３． z 変換に関する次の問いに答えよ。ただし，z 変換の対象となる離散時間領域の関数は $n \geq 0$ で定義されているものとする。(5+5+5+5+5+5=30 点)

(1) $f(n) = 3$ を z 変換したものは， $\boxed{\text{(3–1)}}$ となる。

(2) $f(n) = 2^n$ を z 変換したものは， $\boxed{\text{(3–2)}}$ となる。

(3) $f(n) = \cos 3n$ を z 変換したものは， $\boxed{\text{(3–3)}}$ となる。

(4) $f(n) = 2^n \cos 3n$ を z 変換したものは， $\boxed{\text{(3–4)}}$ となる。

(5) $f(n) = n\frac{1}{3^n}$ を z 変換したものは， $\boxed{\text{(3–5)}}$ となる。

(6) 次の関数を逆 z 変換したものは，したものは， $\boxed{\text{(3–6)}}$ となる。

$$F(z) = \frac{-z+1}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

問４． 次の問に答えよ。(2+1+1+2+1+1+1×11=19 点)

(1) 次の線形システムが可制御であるかどうか，可観測であるかどうか調べたい。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1,\ 2,\ 3) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + 2 \cdot u(t)$$

このシステムの可制御性行列は $\boxed{\text{(4–1)}}$ となる。この行列のランクは $\boxed{\text{(4–2)}}$ であるから，可制御で $\boxed{\text{(4–3)}}$ (「ある」or「ない」)。

このシステムの可観測性行列は $\boxed{\text{(4–4)}}$ となる。この行列のランクは $\boxed{\text{(4–5)}}$ であるから，可観測で $\boxed{\text{(4–6)}}$ (「ある」or「ない」)。

(2) 次の方程式の解の実部がすべて負であるかどうか調べたい。

$$s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 4s + 1 = 0$$

4 つのフルビッツ行列との主座小行列は，$H_1 = \boxed{\text{(4–7)}}$，$H_2 = \boxed{\text{(4–8)}}$，$H_3 = \boxed{\text{(4–9)}}$，$H_4 = \boxed{\text{(4–10)}}$ となり，その行列式の値は，$|H_1| = \boxed{\text{(4–11)}}$，$|H_2| = \boxed{\text{(4–12)}}$，$|H_3| = \boxed{\text{(4–13)}}$，$|H_4| = \boxed{\text{(4–14)}}$ となる。従って，方程式の多項式において すべての項の係数が $\boxed{\text{(4–15)}}$ であるが，フルビッツ行列の主座小行列式の値に $\boxed{\text{(4–16)}}$ から,「解の実部がすべて負である」ことは成立 $\boxed{\text{(4–17)}}$ (「する」or「しない」)。

注意：配点は変更することがあります。

(1-1)

$$\frac{3}{s+1}$$

(1-2)

$$s\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{s+1} \\ 0) \end{pmatrix}$$

(1-3)

$$\frac{s+4}{(s+1)(s+3)^2}$$

(1-4)

$$\frac{2s^2+10s+11}{(s+1)(s+3)^2}$$

(1-5)

$$\frac{s^2+7s+12}{(s+1)(s+3)^2}$$

(1-6)

$$x_x(t) = \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-3t} - \frac{1}{2}te^{-3t}$$

(1-7) -4 (1-8) -1 (1-9) 1 (1-10) -1 (1-11) -1 (1-12) 1

(2-1)

$$Y(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}U(s) = \frac{1}{1+\frac{1}{G(s)F(s)}}U(s)$$

(2-2)

$$K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)$$

(2-3)

$$K_P\left(1+\frac{1}{T_I}\int_0 te(\tau)d\tau + T_D\frac{de(t)}{dt}\right)$$

(2-4) 出力が入力に近くなること

(2-5) ループゲインが大きくなり，振幅余裕が減少するため，不安定になりやすいこと

(3-1)

$$\frac{3z}{z-1}$$

(3-2)

$$\frac{z}{z-2}$$

(3-3)

$$\frac{z(z-\cos 3)}{z^2-2z\cos 3+1}$$

(3-4)

$$\frac{z-2z\cos 3}{z^2-4z\cos 3+4}$$

(3-5)

$$\frac{3z}{(3z-1)^2}$$

(3-6)

$$\begin{cases} 0 & (n=0) \\ 8\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 9\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & (n\geq 1) \end{cases}$$

(4-1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(4-2) 2

(4-3) ない

(4-4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(4-5) 3

(4-6) ある

(4-7)

$$\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

(4-8)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(4-9)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(4-10)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(4-11) 3

(4-12) 2

(4-13) -1

(4-14) -1

(4-15) 正

(4-16) 負のものが存在する

(4-17) しない

参考

問１．

状態変数をラプラス変換したものは，次のように得られる。

$$s\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{s+1} \\ 0) \end{pmatrix}$$

従って，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s+4 & 1 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{s+1} \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{(s+4)(s+2)+1}\begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{s+1} \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+3)^2}\begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2(s+1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+3)^2}\begin{pmatrix} 3(s+2)-2(s+1) \\ 3+2(s+1)(s+4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{s+4}{(s+1)(s+3)^2} \\ \frac{s^2+10s+11}{(s+1)(s+3)^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

出力のラプラス変換は,

$$\begin{aligned}
Y(s) &= (-1,\ -1)\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} + (-1,\ 0)\begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} \\
&= \frac{-(s+4)-(2s^2+10s+11)}{(s+1)(s+3)^2} + \frac{3}{s+1} \\
&= \frac{s^2+7s+12}{(s+1)(s+3)^2}
\end{aligned}$$

となる。また，状態 $x_1(t)$ は,

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \lim_{s\to-1}(s+1)X_1(s)e^{st} + \lim_{s\to-3}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}(s+3)^2X_1(s)e^{st} \\
&= \lim_{s\to-1}\frac{s+4}{(s+3)^2}e^{st} + \lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left(1+\frac{3}{s+1}\right)e^{st} \\
&= \frac{-1+4}{(-1+3)^2}e^{-t} + \lim_{s\to-3}\left\{\left(-\frac{3}{(s+1)^2}\right)e^{st} + \left(1+\frac{3}{s+1}\right)te^{st}\right\} \\
&= \frac{3}{4}e^{-t} + \left(-\frac{3}{(-3+1)^2}\right)e^{-3t} + \left(1+\frac{3}{-3+1}\right)te^{-3t} \\
&= \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-3t} - \frac{1}{2}te^{-3t}
\end{aligned}$$

となる。

問２

入出力関係は,

$$G(s)F(s)(U(s)-Y(s)) = Y(s)$$

より,

$$Y(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}U(s) = \frac{1}{1+\frac{1}{G(s)F(s)}}U(s)$$

となる。ラプラス変換で表した PID 制御の式は,

$$F(s) = K_P\left(1+\frac{1}{T_Is}+T_Ds\right)$$

となる (比例定数に $\alpha_P, \alpha_I, \alpha_D$ を使ってもよい)。

$F(s)=K_P$ の場合であるから，式を変形すると，

$$Y(s)=\frac{1}{1+\frac{1}{K_PG(s)}}U(s)$$

となる。K_P を大きくすれば分母が 1 に近づき，出力を制御したい値 $U(s)$ に近くすることができる。しかしながら，開ループゲイン $K_PG(s)$ が大きくなり，振幅余裕が減少するため，制御系が不安定になりやすくなる。

問 3

(3-1)

$$\sum_{n=0} 3z^{-n}=\sum_{n=0} 3(z^{-1})^n=\frac{3}{1-z^{-1}}=\frac{3z}{z-1}$$

(3-2)

$$\sum_{n=0} 2^n z^{-n}=\sum_{n=0}(2z^{-1})^n=\frac{1}{1-2z^{-1}}=\frac{z}{z-2}$$

(3-3)

$$\sum_{n=0}(\cos 3n)z^{-n}=\sum_{n=0}\frac{e^{3in}+e^{-3in}}{2}z^{-n}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{3i}}+\frac{z}{z-e^{-3i}}\right)=\frac{z(z-e^{-3i}+(z-e^{3i})}{2(z-e^{3i})(z-e^{-3i})}=\frac{z(z-\cos 3)}{z^2-2z\cos 3+1}$$

(3-4)

$$\sum_{n=0}(2^n\cos 3n)z^{-n}=\sum_{n=0}\cos 3n(z/2)^{-n}=\frac{(z/2)^2-z/2\cos 3}{(z/2)^2-2(z/2)\cos 3+1}=\frac{z-2z\cos 3}{z^2-4z\cos 3+4}$$

(3-5)

$$\sum_{n=0} n\frac{1}{3^n}z^{-n}=-z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{n}(3z)^{-n}=-z\frac{d}{dz}\frac{3z}{3z-1}=\frac{3z}{(3z-1)^2}$$

(3-6) $F(z)z^{n-1}$ の留数を計算すればよい。

$n\geq 1$ のとき，極は $z=-1/3,\ z=-1/2$ にある位数 1 の極だけである。

$$\begin{aligned}
f(n) &= \lim_{z\to -1/3}\left(z+\frac{1}{3}\right)F(z)z^{n-1}+\lim_{z\to -1/2}\left(z+\frac{1}{2}\right)F(z)z^{n-1}\\
&= \lim_{z\to -1/3}\frac{-z+1}{z+\frac{1}{2}}z^{n-1}+\lim_{z\to -1/2}\frac{-z+1}{z+\frac{1}{3}}z^{n-1}\\
&= \frac{+\frac{1}{3}+1}{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{+\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\
&= 8\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}-9\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

$n=0$ のとき，極は $z=0,\ z=-1/2,\ z=1/3$ にある位数 1 の極だけである。また，極 $z=-1/3,\ z=1/2$ の留数の値は，上の計算の結果に $n=0$ を代入すれば良い。従って，

$$\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{z\to 0} z\frac{-z+1}{z\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}+8\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}-9\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\\
&= 6-24+18=0
\end{aligned}$$

まとめると以下のようになる。

$$f(n)=\begin{cases}0 & (n=0)\\ 8\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}-9\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & (n\geq 1)\end{cases}$$

問 4

(1)

可制御行列は，

$$\left[\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&3&5\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

となり，行列式が 0 で，明らかに，rank が 2 であるから，可制御でない。」

　可観測行列は,

$$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&6&7\\2&2&3\\3&-1&3\end{pmatrix}$$

となり，この行列式の値は -29 で，ランクは 3 であるため，可観測である。

(2)

　フルビッツ行列は,

$$H=H_4=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\1&2&1&0\\0&3&4&0\\0&1&2&1\end{pmatrix}$$

となる。その主座小行列式は,

$$\begin{aligned}H_1 &= \begin{vmatrix}3\end{vmatrix}=3>0 &(1)\\ H_2 &= \begin{vmatrix}3&4\\1&2\end{vmatrix}=6-4=2>0 &(2)\\ H_3 &= \begin{vmatrix}3&4&0\\1&2&1\\0&3&4\end{vmatrix}=24+0+0-9-16-0=-1<0 &(3)\\ H_4 &= \begin{vmatrix}3&4&0&0\\1&2&1&0\\0&3&4&0\\0&1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&0\\1&3&1\\0&2&3\end{vmatrix}1=-1<0 &(4)\\ & &(5)\end{aligned}$$

となる。係数はすべて正であるが，フルビッツ行列の主座小行列式に正でないものがあるため，すべての解の実部は負ということはない。