平成 27 年度線形システム論 期末試験

**問１．** 次の 2 入力 1 出力 2 次の連続時間線形システム

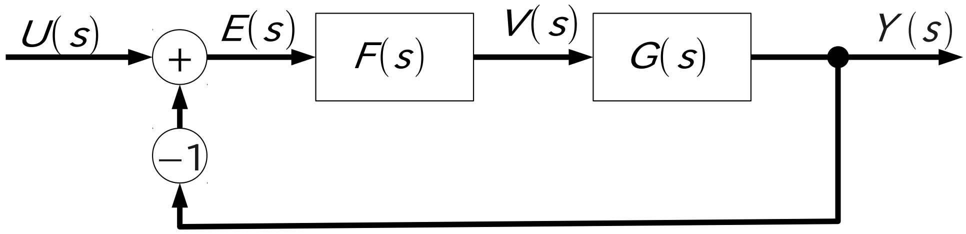
$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \\
y(t) &= (2,\ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \left(0,\ -\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

に対して，初期値と入力を，

$$
\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 0 & (t \geq 0) \end{cases}, \qquad u_2(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2e^{-t} & (t \geq 0) \end{cases}
$$

とする。このとき，$x_1(t)$ および $x_2(t)$ をラプラス変換したもの，および出力 $y(t)$ を求めよ (計算過程も示すこと)。また，このシステムのブロック線図を記せ (ブロック線図に初期値は記さなくてもよい)。(5+5+10+5=25 点)

**問２．** 下図に示すフィードバック回路の入力 $U(s)$ に対する出力 $Y(s)$ を求めよ。次に，PID 制御の制御要素のラプラス変換表現における式を示せ。そして，比例要素だけ (P 制御) のとき，比例要素の係数を大きくすることの利点と欠点を述べよ。また，PID 制御における積分要素の役割を式を使って説明せよ (必要な条件は各自設定せよ)。(5+5+10+5=25 点)




**問３．** $z$ 変換に関する次の問いに答えよ (導出過程も示すこと)。ただし，$z$ 変換の対象となる離散時間領域の関数は $n \geq 0$ で定義されているものとする。(5+5+5+5+5+5=30 点)

(1) $f(n) = 1$ を $z$ 変換せよ。
(2) $f(n) = 3^n$ を $z$ 変換せよ。
(3) $f(n) = \sin 2n$ を $z$ 変換せよ。
(4) $f(n) = 3^n \sin 2n$ を $z$ 変換せよ。
(5) $f(n) = n\frac{1}{2^n}$ を $z$ 変換せよ。
(6) 次の関数を逆 $z$ 変換せよ。

$$
F(z) = \frac{z+1}{\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}
$$

**問４．** 次の問に答えよ。(5+5+10=20 点)

(1) 次の線形システムが可制御であるかどうか，可観測であるかどうか調べよ (計算過程および説明を記すこと)。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\
y(t) &= (2,\ 1,\ 2) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + 4 \cdot u(t)
\end{aligned}
$$

(2) 次の方程式の解の実部がすべて負であるかどうか調べよ。

$$
s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0
$$

**注意：** 配点は変更することがあります。

## 解答例

問１.

状態変数をラプラス変換したものは，次のように得られる。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{s+1} \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{(s+3)(s+1)+1} \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{s+1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \begin{pmatrix} (s+1)^2+2 \\ (s+1)+2(s+3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{s^2+2s-1}{(s+1)(s+2)^2} \\ \frac{3s+7}{(s+1)(s+2)^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

出力のラプラス変換は,

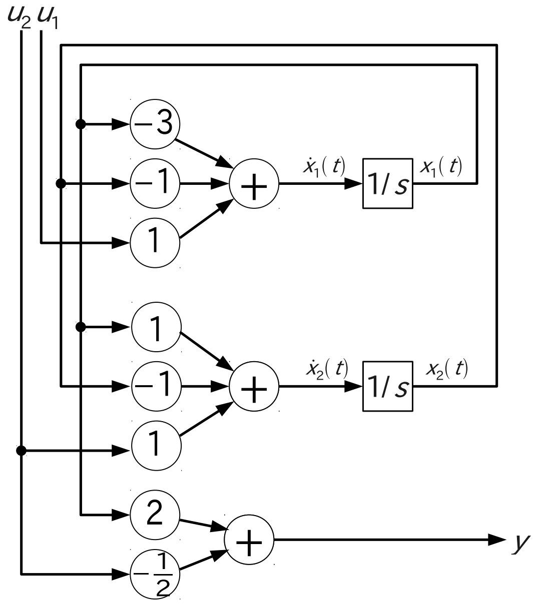
$$
\begin{aligned}
Y(s) &= (2,\ 0) \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} + \left(0,\ -\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} \\
&= \frac{2(s^2+2s-1)}{(s+1)(s+2)^2} - \frac{1}{s+1} \\
&= \frac{2s^2+4s-2-(s^2+4s+4)}{(s+1)(s+2)^2} \\
&= \frac{s^2-6}{(s+1)(s+2)^2}
\end{aligned}
$$

となる。従って，出力 $y(t)$ は,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \lim_{s\to-1}(s+1)Y(s)e^{st} + \lim_{s\to-2} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds}(s+2)^2 Y(s)e^{st} \\
&= \lim_{s\to-1} \frac{s^2-6}{(s+2)^2} e^{st} + \lim_{s\to-2} \frac{d}{ds} \left( s-1-\frac{5}{s+1} \right) e^{st} \\
&= \frac{(-1)^2-6}{(-1+2)^2} e^{-t} + \lim_{s\to-2} \left\{ \left(1+\frac{5}{(s+1)^2}\right) e^{st} + \left(s-1-\frac{5}{s+1}\right) te^{st} \right\} \\
&= -5e^{-t} + \left(1+\frac{5}{(-2+1)^2}\right) e^{-2t} + \left(-2-1-\frac{5}{-2+1}\right) te^{-2t} \\
&= -5e^{-t} + 6e^{-2t} + 2te^{-2t}
\end{aligned}
$$

となる。

また，ブロック線図は以下の通りである。




問２

入出力関係は,

$$G(s)F(s)(U(s)-Y(s))=Y(s)$$

より,

$$Y(s)=\frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}U(s)=\frac{1}{1+\frac{1}{G(s)F(s)}}U(s)$$

となる。ラプラス変換で表した PID 制御の式は,

$$F(s)=K_P\left(1+\frac{1}{T_Is}+T_Ds\right)$$

となる (比例定数に $\alpha_P,\alpha_I,\alpha_D$ を使ってもよい)。

$F(s)=K_P$ の場合であるから，式を変形すると,

$$Y(s)=\frac{1}{1+\frac{1}{K_PG(s)}}U(s)$$

となる。$K_P$ を大きくすれば分母が 1 に近づき，出力を制御したい値 $U(s)$ に近くすることができる。しかしながら，開ループゲイン $K_PG(s)$ が大きくなり，振幅余裕が減少するため，制御系が不安定になりやすくなる。

入力にステップ関数を加える場合を考える。$U(s)=1/s$ が成立する。そして,

$$\frac{1}{1+\frac{1}{G(s)F(s)}}$$

と $G(s)$ が，$s\to 0$ で有限な値を持つものとする。$t\to\infty$ における出力は,

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}sY(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\frac{1}{G(s)F(s)}}$$

となる。積分要素があれば，$\lim_{s\to 0}F(s)$ が発散するため,

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=1$$

となる。従って，積分要素は時間が十分経過すれば，入力の値を出力の値に一致させようとする効果がある。

問３

(1)

$$\sum_{n=0}z^{-n}=\sum_{n=0}(z^{-1})^n=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

(2)

$$\sum_{n=0}3^nz^{-n}=\sum_{n=0}(3z^{-1})^n=\frac{1}{1-3z^{-1}}=\frac{z}{z-3}$$

(3)

$$\sum_{n=0}(\sin 2n)z^{-n} = \sum_{n=0}\frac{e^{2in}-e^{-2in}}{2i}z^{-n} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{2i}} - \frac{z}{z-e^{-2i}}\right) = \frac{z(z-e^{-2i}-(z-e^{2i})}{2i(z-e^{2i})(z-e^{-2i})} = \frac{z\sin 2}{z^2-2z\cos 2+1}$$

(4)

$$\sum_{n=0}(3^n\sin 2n)z^{-n} = \sum_{n=0}\sin 2n(z/3)^{-n} = \frac{(z/3)\sin 2}{(z/3)^2-2(z/3)\cos 2+1} = \frac{3z\sin 2}{z^2-6z\cos 2+9}$$

(5)

$$\sum_{n=0} n\frac{1}{2^n}z^{-n} = -z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{n}(2z)^{-n} = -z\frac{d}{dz}\frac{2z}{2z-1} = \frac{2z}{(2z-1)^2}$$

(6) $F(z)z^{n-1}$ の留数を計算すればよい。

$n \geq 1$ のとき，極は $z=-1/4$, $z=1/2$ にある位数 1 の極だけである。

$$\begin{aligned}
f(n) &= \lim_{z\to -1/4}\left(z+\frac{1}{4}\right)F(z)z^{n-1} + \lim_{z\to 1/2}\left(z-\frac{1}{2}\right)F(z)z^{n-1} \\
&= \lim_{z\to -1/4}\frac{z+1}{z-\frac{1}{2}}z^{n-1} + \lim_{z\to 1/2}\frac{z+1}{z+\frac{1}{4}}z^{n-1} \\
&= \frac{-\frac{1}{4}+1}{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= -\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

$n=0$ のとき，極は $z=0$, $z=-1/2$, $z=1/3$ にある位数 1 の極だけである。また，極 $z=-1/3$, $z=1/2$ の留数の値は，上の計算の結果に $n=0$ を代入すれば良い。従って，

$$\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{z\to 0} z\frac{z+1}{z\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} - \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} + 8 \\
&= -8+8=0
\end{aligned}$$

まとめると以下のようになる。

$$f(n) = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ -\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

問 4

(1)

可制御行列は，

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

となり，行列式が $-18$ で 0 で，rank が 3 となるため，可制御である。」

可観測行列は，

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 13 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

となり，この行列式は 0 で rank が 3 でないため，可観測ではない。

(2)

フルビッツ行列は，

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。その主座小行列式は,

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2 > 0 && (1)\\
H_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3 > 0 && (2)\\
H_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 0 + 0 - 4 - 9 - 0 = 5 > 0 && (3)\\
H_4 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0 && (4)\\
& && (5)
\end{aligned}
$$

となる。係数はすべて正であり，フルビッツ行列の主座小行列式もすべて正であるため，すべての解の実部は負である。