平成 27 年度線形システム論 期末試験

問1． 次の 2 入力 1 出力 2 次の連続時間線形システム

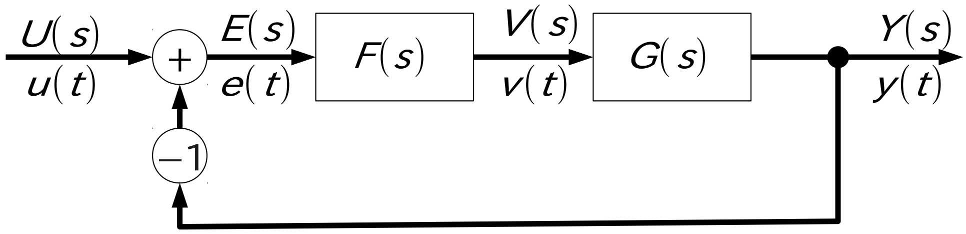
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix}\\ y(t) &= (1,\ 0)\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\left(0,\ \frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

に対して，初期値と入力を，

$$\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix},\qquad u_1(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 0 & (t\geq 0)\end{cases},\qquad u_2(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 3e^{-4t} & (t\geq 0)\end{cases}$$

とする。このとき，$x_1(t)$ および $x_2(t)$ をラプラス変換したもの，および出力 $y(t)$ を求めよ (計算過程も示すこと)。また，このシステムのブロック線図を記せ (ブロック線図に初期値は記さなくてもよい)。(5+5+10+5=25 点)

問2． 下図に示すフィードバック回路の入力 $U(s)$ に対する出力 $Y(s)$ を求めよ。また，PID 制御の制御要素の時間表現における式，ラプラス変換表現における式をそれぞれ示せ。その微分要素の役割を式を使って説明せよ (必要な条件は各自設定せよ)。(5+5+5+10=25 点)



問3． z 変換に関する次の問いに答えよ (導出過程も示すこと)。ただし，z 変換の対象となる離散時間領域の関数は $n \geq 0$ で定義されているものとする。(5+5+5+5+5+5=30 点)

(1) $f(n)=1$ を z 変換せよ。
(2) $f(n)=2^n$ を z 変換せよ。
(3) $f(n)=\cos 3n$ を z 変換せよ。
(4) $f(n)=5^n\cos 3n$ を z 変換せよ。
(5) $f(n)=n4^n$ を z 変換せよ。
(6) 次の関数を逆 z 変換せよ。

$$F(z)=\frac{z-1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

問4． 次の問に答えよ。(5+5+10=20 点)

(1) 次の線形システムが可制御であるかどうか，可観測であるかどうか調べよ (計算過程および説明を記すこと)。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 2\end{pmatrix}u(t)\\ y(t) &= (1,\ 2,\ 1)\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}+4\cdot u(t)\end{aligned}$$

(2) 次の方程式の解の実部がすべて負であるかどうか調べよ。

$$2s^4+2s^3+3s^2+s+2=0$$

注意：配点は変更することがあります。

解答例

問１.

状態変数をラプラス変換したものは，次のように得られる。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s+3 & -1 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{s+4} \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{(s+3)(s+3)-1} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 1 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{s+4} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+2)(s+4)^2} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 1 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(s+4) \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+2)(s+4)^2} \begin{pmatrix} -(s^2+7s+12)+3 \\ -(s+4)+(3s+9) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-s^2-7s-9}{(s+2)(s+4)^2} \\ \frac{2s+5}{(s+2)(s+4)^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

出力のラプラス変換は,

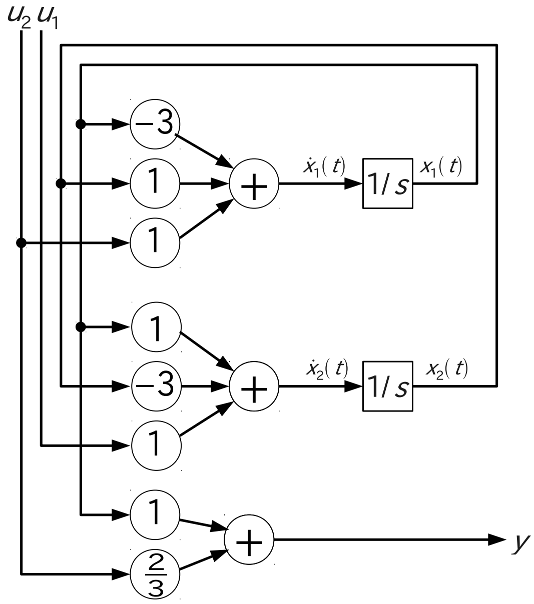
$$
\begin{aligned}
Y(s) &= (1,\ 0) \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} + \left(0,\ \frac{2}{3}\right) \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} \\
&= \frac{-s^2-7s-9}{(s+2)(s+4)^2} + \frac{2}{s+4} \\
&= \frac{-s^2-7s-9+2(s^2+6s+8)}{(s+2)(s+4)^2} \\
&= \frac{s^2+5s+7}{(s+2)(s+4)^2}
\end{aligned}
$$

となる。従って，出力 $y(t)$ は,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \lim_{s\to-2}(s+2)Y(s)e^{st} + \lim_{s\to-4}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}(s+4)^2Y(s)e^{st} \\
&= \lim_{s\to-2}\frac{s^2+5s+7}{(s+4)^2}e^{st} + \lim_{s\to-4}\frac{d}{ds}\left(s+3+\frac{1}{s+2}\right)e^{st} \\
&= \lim_{s\to-2}\frac{(-2)^2+5(-2)+7}{(-2+4)^2}e^{-2t} + \lim_{s\to-4}\left\{\left(1-\frac{1}{(s+2)^2}\right)e^{st} + \left(s+3+\frac{1}{(s+2)}\right)te^{st}\right\} \\
&= \frac{1}{4}e^{-2t} + \left(1-\frac{1}{(-4+2)^2}\right)e^{-4t}\left(-4+3+\frac{1}{(-4+2)}\right)te^{-4t} \\
&= \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-4t} - \frac{3}{2}te^{-4t}
\end{aligned}
$$

となる。

また，ブロック線図は以下の通りである。



問２

入出力関係は,

$$G(s)F(s)(U(s)-Y(s))=Y(s)$$

より,

$$Y(s)=\frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}U(s)=\frac{1}{1+\frac{1}{g(s)F(s)}}U(s)$$

となる。ラプラス変換で表した PID 制御の式は,

$$A(s)=K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)$$

となる (比例定数に $\alpha_P,\alpha_I,\alpha_D$ を使ってもよい)。時間軸で表した場合,

$$v(t)=K_P\left(e(t)+\frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)d\tau+T_D\frac{d}{dt}e(t)\right)$$

となる (比例定数に $\alpha_P,\alpha_I,\alpha_D$ を使ってもよい)。

$$\frac{1}{1+\frac{1}{G(s)F(s)}}$$

と $G(s)$ が，$s\to\infty$ で有限な値を持つものとする。$t=0$ における出力は,

$$y(0)=\lim_{s\to\infty}sY(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{G(s)F(s)}}u(0)$$

となる。微分要素があれば，$\lim_{s\to\infty}F(s)$ が発散するため,

$$y(0)=u(0)$$

となる。従って，微分要素はすぐに入力の値を出力の値に一致させようとする効果がある。

問３

(1)

$$\sum_{n=0} z^{-n}=\sum_{n=0}(z^{-1})^n=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

(2)

$$\sum_{n=0} 2^n z^{-n}=\sum_{n=0}(2z^{-1})^n=\frac{1}{1-2z^{-1}}=\frac{z}{z-2}$$

(2)

$$\sum_{n=0}(\cos 3n)z^{-n}=\sum_{n=0}\frac{e^{3in}+e^{-3in}}{2}z^{-n}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{3i}}+\frac{z}{z-e^{-3i}}\right)=\frac{z(z-e^{-3i}+z-e^{3i})}{2(z-e^{3i})(z-e^{-3i})}=\frac{z^2-z\cos 3}{z^2-2z\cos 3+1}$$

(3)

$$\sum_{n=0}(5^n\cos 3n)z^{-n}=\sum_{n=0}\cos 3n(z/5)^{-n}=\frac{(z/5)^2-(z/5)\cos 3}{(z/5)^2-2(z/5)\cos 3+1}=\frac{z^2-5z\cos 3}{z^2-10z\cos 3+25}$$

(4)

$$\sum_{n=0}n4^nz^{-n}=-z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}4^nz^{-n}=-z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-4}=\frac{4z}{(z-4)^2}$$

(5) $F(z)z^{n-1}$ の留数を計算すればよい。

$n\geq 1$ のとき，極は $z=-1/2$, $z=1/3$ にある位数 1 の極だけである。

$$\begin{aligned}
f(n) &= \lim_{z\to -1/2}\left(z+\frac{1}{2}\right)F(z)z^{n-1}+\lim_{z\to 1/3}\left(z-\frac{1}{3}\right)F(z)z^{n-1}\\
&= \lim_{z\to -1/2}\frac{z-1}{z-\frac{1}{3}}z^{n-1}+\lim_{z\to 1/3}\frac{z-1}{z+\frac{1}{2}}z^{n-1}\\
&= \frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\
&= \frac{9}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

$n=0$ のとき，極は $z=0$, $z=-1/2$, $z=1/3$ にある位数 1 の極だけである。また，極 $z=-1/3$, $z=1/2$ の留数の値は，上の計算の結果に $n=0$ を代入すれば良い。従って，

$$\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{z\to 0}z\frac{z-1}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}+\frac{9}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\\
&= \frac{-1}{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)}-\frac{18}{5}-\frac{12}{5}\\
&= 6-\frac{30}{5}=0
\end{aligned}$$

まとめると以下のようになる。

$$f(n)=\begin{cases}0 & (n=0)\\ \frac{9}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & (n\geq 1)\end{cases}$$

問 4

(1)

可制御行列は,

$$\left[\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-1&0\\1&0&2\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&4&14\\0&2&2\\2&6&26\end{pmatrix}$$

となり，行列式が 0 であり rank が 3 ではないため，可制御ではない。

可観測行列は,

$$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&2\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&0&8\\1&3&10\end{pmatrix}$$

となり，この行列式は -30 で，0 でないため rank は 3 となり，可観測である。

(2)

フルビッツ行列は,

$$H=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\2&3&2&0\\0&2&1&0\\0&2&3&2\end{pmatrix}$$

となる。その主座小行列式は,

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2 > 0 && (1)\\
H_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 > 0 && (2)\\
H_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 0 - 8 - 2 - 0 = -4 < 0 && (3)\\
H_4 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 < 0 && (4)\\
& && (5)
\end{aligned}
$$

となる。係数はすべて正であるが，フルビッツ行列の主座小行列式の中に負なものがあるため，解の実部が負でないものが存在する。