平成 23 年度線形システム論 期末試験

問 1． 次の 2 入力 1 出力 2 次の連続時間線形システム

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}
$$

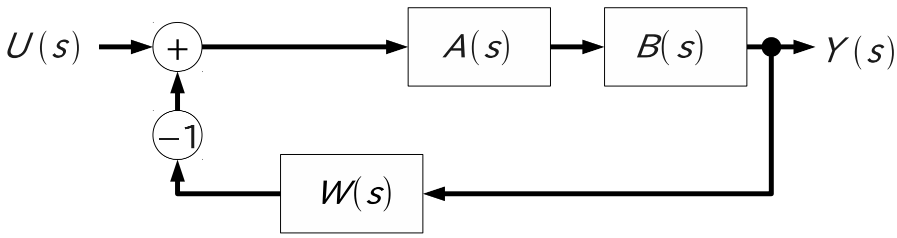
$$
y(t) = (0,\ 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + (0,\ 0) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}
$$

に対して，初期値と入力を，

$$
\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-2t} & (t \geq 0) \end{cases}, \qquad u_2(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-t} & (t \geq 0) \end{cases}
$$

とする。このとき，$x_1(t)$ および $x_2(t)$ をラプラス変換したもの，および出力 $y(t)$ を求めよ (計算過程も示すこと)。また，このシステムのブロック線図を記せ (ブロック線図に初期値は記さなくてもよい)。(5+5+10+5=25 点)

問 2． 下図に示すフィードバック回路の入力 $U(s)$ に対する出力 $Y(s)$ を求めよ。ここで，$A(s)$ を制御要素，$B(s)$ に制御対象，$W(s)$ をフィードバック要素とするとき，PID 制御の式を $A(s)$ または $B(s)$ または $W(s)$ に対して示し，その積分要素の役割を式を使って説明せよ (必要な条件は各自設定せよ)。(10+5+10=25 点)



問 3． z 変換に関する次の問いに答えよ (導出過程も示すこと)。ただし，z 変換の対象となる離散時間領域の関数は $n \geq 0$ で定義されているものとする。(5+5+5+5+10=30 点)

(1) 次の関数を z 変換せよ。

$$f(n) = 3^n$$

(2) 次の関数を z 変換せよ。

$$f(n) = \sin 2n$$

(3) 次の関数を z 変換せよ。

$$f(n) = 3^n \sin 2n$$

(4) 次の関数を z 変換せよ。

$$f(n) = n3^n$$

(5) 次の関数を逆 z 変換せよ。

$$F(z) = \frac{z+1}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

問 4． 次の問に答えよ。(5+5+10=20 点)

(1) 次の線形システムが可制御であるかどうか，可観測であるかどうか調べよ (計算過程および説明を記すこと)。

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)
$$

$$
y(t) = (0,\ 1,\ 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + 3 \cdot u(t)
$$

(2) 次の方程式の解の実部がすべて負であるかどうか調べよ。

$$s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 2s + 3 = 0$$

注意：配点は変更することがあります。

解答例

問１.

状態変数をラプラス変換したものは，次のように得られる。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s+3 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{(s+3)(s+1)+1} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s+2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+2)^2} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2s+3}{s+1} \\ \frac{2}{s+2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+2)^2} \begin{pmatrix} 2s+3+\frac{2}{s+2} \\ -\frac{2s+3}{s+1}+\frac{2(s+3)}{s+2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(2s+3)(s+2)+2}{(s+2)^3} \\ \frac{-(2s+3)(s+2)+(s+1)(2s+6)}{(s+1)(s+2)^3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2s^2+7s+8}{(s+2)^3} \\ \frac{s}{(s+1)(s+2)^3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

出力のラプラス変換は,

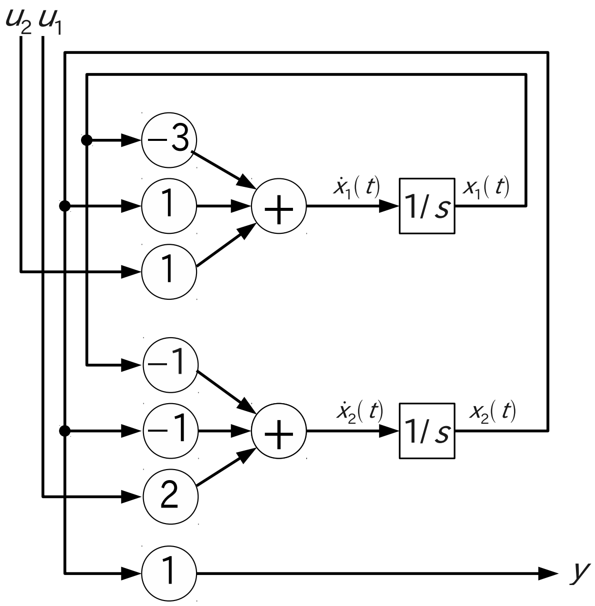
$$
\begin{aligned}
Y(s) &= (0,\ 1) \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} + (0,\ 0) \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} \\
&= X_2(s) \\
&= \frac{s}{(s+1)(s+2)^3}
\end{aligned}
$$

となる。従って，出力 $y(t)$ は,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \lim_{s\to-1}(s+1)Y(s)e^{st} + \lim_{s\to-2}\frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{ds^2}(s+2)^3Y(s)e^{st} \\
&= \lim_{s\to-1}\frac{s}{(s+2)^3}e^{st} + \frac{1}{2}\lim_{s\to-2}\frac{d^2}{ds^2}\frac{s}{(s+1)}e^{st} \\
&= \frac{-1}{(-1+2)^3}e^{-t} + \frac{1}{2}\lim_{s\to-2}\frac{d^2}{ds^2}\left\{\left(1-\frac{1}{(s+1)}\right)e^{st}\right\} \\
&= -e^{-t} + \frac{1}{2}\lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}e^{st} + \left(1-\frac{1}{(s+1)}\right)te^{st}\right\} \\
&= -e^{-t} + \frac{1}{2}\lim_{s\to-2}\left\{\frac{-2}{(s+1)^3}e^{st} + 2\frac{1}{(s+1)^2}te^{st} + \left(1-\frac{1}{(s+1)}\right)t^2e^{st}\right\} \\
&= -e^{-t} + \frac{1}{2}\left\{\frac{-2}{(-2+1)^3}e^{-2t} + 2\frac{1}{(-2+1)^2}te^{-2t} + \left(1-\frac{1}{(-2+1)}\right)t^2e^{-2t}\right\} \\
&= -e^{-t} + e^{-t} + te^{-t} + t^2e^{-2t}
\end{aligned}
$$

となる。

また，ブロック線図は以下の通りである。



問 2

入出力関係は,

$$B(s)A(s)(U(s)-W(s)Y(s))=Y(s)$$

より,

$$Y(s)=\frac{B(s)A(s)}{1+W(s)B(s)A(s)}U(s)=\frac{1}{W(s)+\frac{1}{B(s)A(s)}}U(s)$$

となる。PID 制御の式は,

$$A(s)=K_P\left(1+\frac{1}{T_Is}+T_Ds\right)$$

となる。$\frac{1}{W(s)+\frac{1}{B(s)A(s)}}$ が $s\to 0$ で極限を持つものとする。入力が一定であるとして，十分時間経過したときの出力の値は,

$$\lim_{s\to 0}sY(s)=\frac{1}{W(0)+\frac{1}{B(0)A(0)}}\lim_{s\to 0}sU(s)$$

となる。$\lim_{s\to 0}sU(s)$ は，一定にした入力の値である。積分要素があれば，$\lim_{s\to\infty}A(s)$ が発散するため,

$$\lim_{s\to\infty}sY(s)=\frac{1}{W(0)}\lim_{s\to\infty}sU(s)$$

となる。従って，積分要素は十分時間が経過したときに，誤差を積分することによって，出力の値を入力の $1/W(0)$ 倍にしようとする効果がある。

問 3

(1)

$$\sum_{n=0}3^nz^{-n}=\sum_{n=0}(3z^{-1})^n=\frac{1}{1-3z^{-1}}=\frac{z}{z-3}$$

(2)

$$\sum_{n=0}(\sin 2n)z^{-n}=\sum_{n=0}\frac{e^{2in}-e^{-2in}}{2i}z^{-n}=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-e^{2i}}-\frac{z}{z-e^{-2i}}\right)=\frac{z(z-e^{-2i}-(z-e^{2i}))}{2i(z-e^{2i})(z-e^{-2i})}=\frac{z(\sin 2)}{z^2-2z\cos 2+1}$$

(3)

$$\sum_{n=0}(3^n\sin 2n)z^{-n}=\sum_{n=0}\sin 2n(z/3)^{-n}=\frac{z/3(\sin 2)}{(z/3)^2-2(z/3)\cos 2+1}=\frac{3z(\sin 2)}{z^2-6z\cos 2+9}$$

(4)

$$\sum_{n=0}n3^nz^{-n}=-z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}3^nz^{-n}=-z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}\frac{z}{z-3}=\frac{3z}{(z-3)^2}$$

(5) $F(z)z^{n-1}$ の留数を計算すればよい。

$n \geq 1$ のとき，極は $z = -1/3$, $z = 1/4$ にある位数 1 の極だけである。

$$\begin{aligned}
f(n) &= \lim_{z \to -1/3} \left(z + \frac{1}{3} \right) F(z) z^{n-1} + \lim_{z \to 1/4} \left(z - \frac{1}{4} \right) F(z) z^{n-1} \\
&= \lim_{z \to -1/3} \frac{z+1}{z - \frac{1}{4}} z^{n-1} + \lim_{z \to 1/4} \frac{z+1}{z + \frac{1}{3}} z^{n-1} \\
&= \frac{\frac{-1}{3} + 1}{\frac{-1}{3} - \frac{1}{4}} \left(\frac{-1}{3} \right)^{n-1} + \frac{\frac{1}{4} + 1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \\
&= = -\frac{8}{7} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{15}{7} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}
\end{aligned}$$

$n = 0$ のとき，極は $z = 0$, $z = -1/3$, $z = 1/4$ にある位数 1 の極だけである。また，極 $z = -1/2$, $z = 1/3$ の留数の値は，上の計算の結果に $n = 0$ を代入すれば良い。従って，

$$\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{z \to 0} z \frac{z+1}{z \left(z + \frac{1}{3} \right) \left(z - \frac{1}{4} \right)} - \frac{8}{7} \left(-\frac{1}{3} \right)^{-1} + \frac{15}{7} \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4} \right)} + \frac{24}{7} + \frac{60}{7} \\
&= -12 + \frac{84}{7} = 0
\end{aligned}$$

まとめると以下のようになる。

$$f(n) = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ = -\frac{8}{7} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{15}{7} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

問４

(1)

可制御行列は,

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

となり，行列式が 0 であり rank が 3 ではないため，可制御ではない。

可観測行列は,

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 11 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

となり，この行列式は 0 でないため rank は 3 となり，可観測である。

(2)

フルビッツ行列は,

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。その主座小行列式は,

$$H_1 = \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = 3 > 0 \tag{1}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10 > 0 \tag{2}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 0 + 0 - 27 - 4 - 0 = -7 < 0 \tag{3}$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -21 < 0 \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

となる。係数はすべて正であるが，フルビッツ行列の主座小行列式の中に負なものがあるため，解の実部が負でないものが存在する。