平成 23 年度線形システム論 期末試験

問1． 次の 2 入力 1 出力 2 次の連続時間線形システム

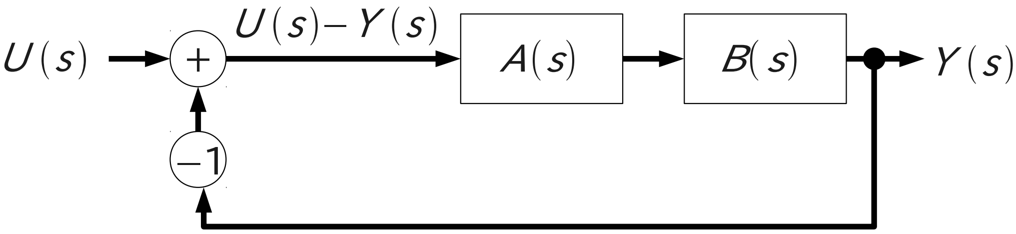
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-4 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix}\\ y(t) &= (0,\ 1)\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} + (-1,\ 0)\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

に対して，初期値と入力を，

$$\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \qquad u_1(t) = \begin{cases}0 & (t<0)\\ e^{-t} & (t \geq 0)\end{cases}, \qquad u_2(t) = \begin{cases}0 & (t<0)\\ e^{-t} & (t \geq 0)\end{cases}$$

とする。このとき，$x_1(t)$ および $x_2(t)$ をラプラス変換したもの，および出力 $y(t)$ を求めよ (計算過程も示すこと)。また，このシステムのブロック線図を記せ (ブロック線図に初期値は記さなくてもよい)。(5+5+10+5=25 点)

問2． 下図に示すフィードバック回路の入力 $U(s)$ に対する出力を求めよ。ここで，$A(s)$ を制御要素，$B(s)$ に制御対象とするとき，PID 制御の式を $A(s)$ または $B(s)$ に対して示し，その積分要素の役割を式を使って説明せよ (必要な条件は各自設定せよ)。(10+5+10=25 点)



問3． z 変換に関する次の問いに答えよ (導出過程も示すこと)。ただし，z 変換の対象となる離散時間領域の関数は $n \geq 0$ で定義されているものとする。(5+5+5+5+10=30 点)

(1) 次の関数を z 変換せよ。

$$f(n) = 1$$

(2) 次の関数を z 変換せよ。

$$f(n) = a^n$$

(3) 次の関数を z 変換せよ。

$$f(n) = \cos 3n$$

(4) 次の関数を z 変換せよ。

$$f(n) = na^n$$

(5) 次の関数を逆 z 変換せよ。

$$F(z) = \frac{z+2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

問4． 次の問に答えよ。(5+5+10=20 点)

(1) 次の線形システムが可制御であるかどうか，可観測であるかどうか調べよ (計算過程および説明を記すこと)。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}u(t)\\ y(t) &= (1,\ -1,\ 1)\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix} + -1 \cdot u(t)\end{aligned}$$

(2) 次の方程式の解の実部がすべて負であるかどうか調べよ。

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 3s + 2 = 0$$

注意：配点は変更することがあります。

解答例

問１．

状態変数をラプラス変換したものは，次のように得られる。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s+4 & -3 \\ 1 & s \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{(s+4)s+3} \begin{pmatrix} s & 3 \\ -1 & s+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 1+\frac{-2}{s+1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+1)^2(s+3)} \begin{pmatrix} s+3(s-1) \\ -1+(s+4)(s-1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+1)^2(s+3)} \begin{pmatrix} 4s-3 \\ s^2+3s-5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4s-3}{(s+1)^2(s+3)} \\ \frac{s^2+3s-5}{(s+1)^2(s+3)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

出力のラプラス変換は,

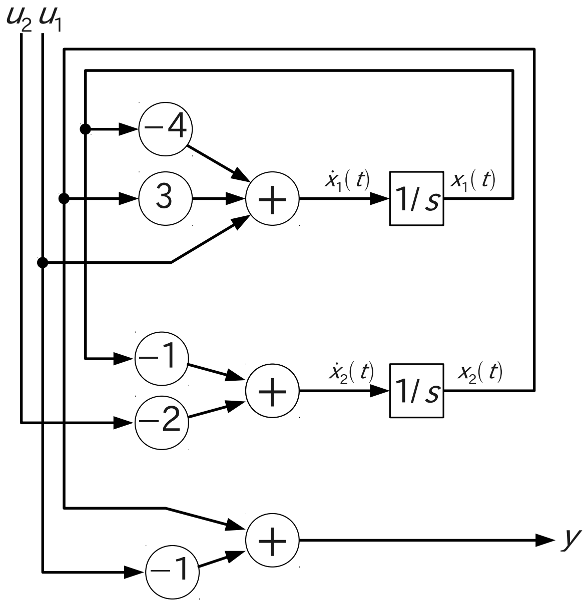
$$
\begin{aligned}
Y(s) &= (0,\ 1) \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} + (-1,\ 0) \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} \\
&= (0,\ 1) \begin{pmatrix} \frac{4s-3}{(s+1)^2(s+3)} \\ \frac{s^2+3s-5}{(s+1)^2(s+3)} \end{pmatrix} + (-1,\ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{s^2+3s-5-(s+1)(s+3)}{(s+1)^2(s+3)} \\
&= \frac{-s-8}{(s+1)^2(s+3)}
\end{aligned}
$$

となる。従って，出力 $y(t)$ は,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s\to-1} \frac{d}{ds}(s+1)^2 \frac{-s-8}{(s+1)^2(s+3)} e^{st} + \lim_{s\to-3}(s+3) \frac{-s-8}{(s+1)^2(s+3)} e^{st} \\
&= \lim_{s\to-1} \frac{d}{ds} \left(-1 - \frac{5}{s+3} \right) e^{st} + \lim_{s\to-3} \frac{-s-8}{(s+1)^2} e^{st} \\
&= \lim_{s\to-1} \left\{ \left(-1 - \frac{5}{s+3} \right) t e^{st} + \left(\frac{5}{(s+3)^2} \right) e^{st} \right\} + \frac{-(-3)-8}{(-3+1)^2} e^{-3t} \\
&= \left(-1 - \frac{5}{-1+3} \right) t e^{-t} + \left(\frac{5}{(-1+3)^2} \right) e^{-t} - \frac{5}{4} e^{-3t} \\
&= -\frac{7}{2} t e^{-t} + \frac{5}{4} e^{-t} - \frac{5}{4} e^{-3t}
\end{aligned}
$$

となる。

また，ブロック線図は以下の通りである。



問２

入出力関係は,

$$B(s)A(s)(U(s)-Y(s))=Y(s)$$

より,

$$Y(s)=\frac{B(s)A(s)}{1+B(s)A(s)}U(s)=\frac{1}{1+\frac{1}{B(s)A(s)}}U(s)$$

となる。PID 制御の式は,

$$A(s)=K_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)$$

となる。$\frac{1}{1+\frac{1}{B(s)A(s)}}$ が $s\to 0$ で極限を持つものとする。入力が一定であるとして，十分時間経過したときの出力の値は,

$$\lim_{s\to 0} sY(s)=\frac{1}{1+\frac{1}{B(0)A(0)}}\lim_{s\to 0} sU(s)$$

となる。$\lim_{s\to 0} sU(s)$ は，一定にした入力の値である。積分要素があれば，$\lim_{s\to\infty} B(s)$ が発散するため,

$$\lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0} sU(s)$$

となる。従って，積分要素は十分時間が経過したときに，誤差を積分することによって，出力の値を入力と同じ値にしようとする効果がある。

問３

(1)

$$\sum_{n=0} z^{-n}=\sum_{n=0}(z^{-1})^n=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

(2)

$$\sum_{n=0} a^n z^{-n}=\sum_{n=0}(az^{-1})^n=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

(3)

$$\sum_{n=0} na^n z^{-n}=-z\frac{d}{dz}\sum_{n=0} a^n z^{-n}=-\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right)=-z\frac{(z-a)-z}{(z-a)^2}=\frac{az}{(z-a)^2}$$

(4)

$$\sum_{n=0}(\cos 3n)z^{-n}=\sum_{n=0}\frac{e^{3in}-e^{-3in}}{2}z^{-n}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{3i}}-\frac{z}{z-e^{-3i}}\right)=\frac{z(z-e^{-3i}+z-e^{3i})}{2(z-e^{i\omega})(z-e^{-i\omega})}=\frac{z(z-\cos 3)}{z^2-2z\cos\omega+1}$$

(5) $F(z)z^{n-1}$ の留数を計算すればよい。

$n \geq 1$ のとき，極は $z=-1/2,\, z=1/3$ にある位数 1 の極だけである。

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \lim_{z \to -1/2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\frac{z+2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}z^{n-1}+\lim_{z \to 1/3}\left(z-\frac{1}{3}\right)\frac{z+2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}z^{n-1} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}+2}{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{\frac{1}{3}+2}{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{9}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{14}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

$n=0$ のとき，極は $z=0,\, z=-1/2,\, z=1/3$ にある位数 1 の極だけである。また，極 $z=-1/2,\, z=1/3$ の留数の値は，上の計算の結果に $n=0$ を代入すれば良い。従って，

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{z \to 0} z\frac{z+2}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}-\frac{9}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}+\frac{14}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \\
&= \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)}+\frac{18}{5}+\frac{42}{5} \\
&= -12+12=0
\end{aligned}
$$

まとめると以下のようになる。

$$
f(n)=\begin{cases} 0 & (n=0) \\ =-\frac{9}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{14}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & (n \geq 1) \end{cases}
$$

問 4

(1)

可制御行列は,

$$
\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}
$$

となり，1 列と 3 列が 1 次独立でないため，可制御ではない。

可観測行列は,

$$
\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

となり，この行列式は 8 で，ランクが 3 となるため可観測である。

(2)

フルビッツ行列は,

$$
H=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}
$$

となる。その主座小行列式は,

$$
H_1 = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix}=2>0 \tag{1}
$$

$$
H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=6-3=3>0 \tag{2}
$$

$$
H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=18+0+0-8-9-0=1>0 \tag{3}
$$

$$
H_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2>0 \tag{4}
$$

$$
\tag{5}
$$

となる。係数はすべて正で，フルビッツ行列の主座小行列式もすべて正であるため，すべての解の実部は負である。