平成 23 年度線形システム論 期末試験

問１． 次の 2 入力 1 出力 2 次の連続時間線形システム

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (2,\ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + (-1,\ 0) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

に対して，初期値と入力を，

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 0 & (t \geq 0) \end{cases}, \qquad u_2(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-2t} & (t \geq 0) \end{cases}$$

とする。このとき，$x_1(t)$ および $x_2(t)$ をラプラス変換したもの，および出力 $y(t)$ を求めよ (計算過程も示すこと)。また，このシステムのブロック線図を記せ (ブロック線図に初期値は記さなくてもよい)。(5+5+10+10=30 点)

問２． 次の伝達関数の角周波数 ω に対する振幅，位相特性を式で表す (関数 arg を使ってよい) と共に，ボード線図 (振幅と位相の両方) を図示せよ。なお，図内に重要な数値や補助線を書き込むこと。(10+15=25 点)

(1)

$$F(s) = \frac{1000}{s + 1000}$$

(2)

$$F(s) = \frac{s + 10}{s + 10000}$$

問３． z 変換に関する次の問いに答えよ (導出過程も示すこと)。ただし，z 変換の対象となる離散時間領域の関数は $n \geq 0$ で定義されているものとする。(5+5+5+10=25 点)

(1) 次の関数を z 変換せよ。

$$f(n) = a^n$$

(2) 次の関数を z 変換せよ。

$$f(n) = n$$

(3) 次の関数を z 変換せよ。

$$f(n) = \sin \omega n$$

(4) 次の関数を逆 z 変換せよ。

$$F(z) = \frac{-z - 1}{\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

問４． 次の問に答えよ。(5+5+10=20 点)

(1) 次の線形システムが可制御であるかどうか，可観測であるかどうか調べよ (計算過程および説明を記すこと)。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1,\ 2,\ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + 2 \cdot u(t)$$

(2) 次の方程式の解の実部がすべて負であるかどうか調べよ。

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = 0$$

注意： 配点は変更することがあります。

解答例

問１．

状態変数をラプラス変換したものは，次のように得られる (15 点)。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+4 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+4)+2} \begin{pmatrix} s+4 & 2 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+2)^2(s+3)} \begin{pmatrix} 2(s+4)(s+2)+2 \\ -2(s+2)+(s+1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+2)^2(s+3)} \begin{pmatrix} 2(s+3)^2 \\ -(s+3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2(s+3)}{(s+2)^2} \\ \frac{-1}{(s+2)^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

出力のラプラス変換は,

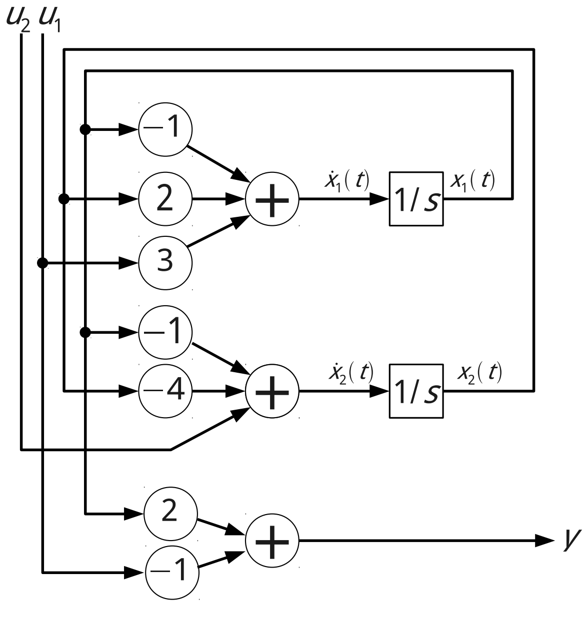
$$
\begin{aligned}
Y(s) &= (2,\ 0) \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} + (-1,\ 0) \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} \\
&= (2,\ 0) \begin{pmatrix} \frac{4(s+3)}{(s+2)^2} \\ \frac{-1}{(s+2)^2} \end{pmatrix} + (-1,\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{4(s+3)}{(s+2)^2}
\end{aligned}
$$

となる。従って，出力 $y(t)$ は,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \to -2} \frac{d}{ds} (s+2)^2 \frac{4(s+3)}{(s+2)^2} e^{st} \\
&= \lim_{s \to -2} 4[s^{st} + (s+3)te^{st}] \\
&= 4e^{-2t} + 4te^{-2t}
\end{aligned}
$$

となる (15 点)。

また，ブロック線図は以下の通りである (10 点)。



問 2 (10 点+10 点)

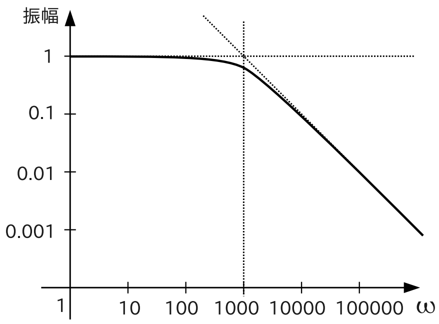
(1) 振幅特性は,

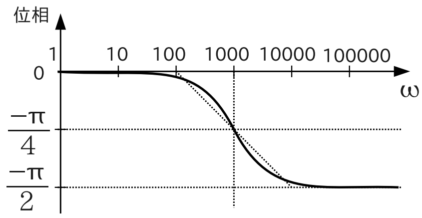
$$|F(i\omega)| = \frac{1000}{\sqrt{\omega^2 + 1000^2}}$$

位相特性は,

$$\arg(1000 - i\omega)$$

となる。ボード線図は次のようになる。





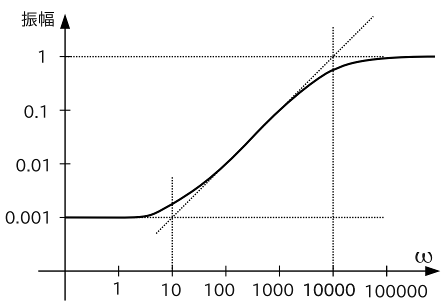
(1) 振幅特性は,

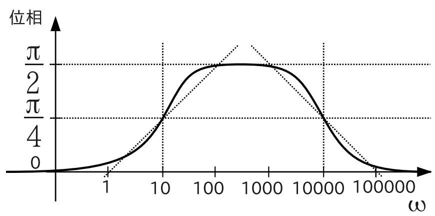
$$|F(i\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 10^2}}{\sqrt{\omega^2 + 10000^2}}$$

位相特性は,

$$\arg\left[(10 + i\omega)(10000 - i\omega)\right]$$

となる。ボード線図は次のようになる。





問 3 (5 点 ×3, 10 点)

(1)

$$\sum_{n=0} a^n z^{-n} = \sum_{n=0} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

(2)

$$\sum_{n=0} nz^{-n} = -z\frac{d}{dz}\sum_{n=0} z^{-n} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -z\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

(3)

$$\sum_{n=0}(\sin\omega n)z^{-n} = \sum_{n=0}\frac{e^{i\omega n}-e^{-i\omega n}}{2i}z^{-n} = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-e^{i\omega}} - \frac{z}{z-e^{-i\omega}}\right) = \frac{z(z-e^{-i\omega}-z+e^{i\omega})}{2i(z-e^{i\omega})(z-e^{-i\omega})} = \frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$$

(4) $F(z)z^{n-1}$ の留数を計算すればよい。$n=0$ のとき，極は $z=0$, $z=1/4$, $z=1/2$ にある 1 位の極だけである。従って，

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{z\to 0} z\frac{-z-1}{z\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} + \lim_{z\to 1/4}\left(z-\frac{1}{4}\right)\frac{-z-1}{z\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} + \lim_{z\to 1/2}\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{-z-1}{z\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{-1}{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} + \frac{-\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)} + \frac{-\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)} \\ &= -8-20+12=0 \end{aligned}$$

$n\geq 1$ のとき，極は $z=1/4$, $z=1/2$ にある 1 位の極だけである。

$$\begin{aligned} f(n) &= \lim_{z\to 1/4}\left(z-\frac{1}{4}\right)\frac{-z-1}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}z^{n-1} + \lim_{z\to 1/2}\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{-z-1}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}z^{n-1} \\ &= +\frac{-\frac{1}{4}-1}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{-\frac{1}{2}-1}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

まとめると以下のようになる。

$$f(n) = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ 5\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & (n\geq 1) \end{cases}$$

問 4

(1) (5 点+5 点)

可制御行列は,

$$\left[\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&0\\1&-1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&0\\1&-1&0\\1&0&2\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&0\\2&5&11\end{pmatrix}$$

となり，この行列式は 5 であるのでランクが 3 となり，可制御である。

可観測行列は,

$$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1&3&3\\2&0&6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

となり，この行列式は 0 で，ランクが 3 とはならないため可観測でない。

(2) (5 点)

フルビッツ行列は,

$$H = \begin{pmatrix}3&2&0&0\\1&3&1&0\\0&3&2&0\\0&1&3&1\end{pmatrix}$$

となる。その主座小行列式は,

$$H_1 = \begin{vmatrix}3\end{vmatrix} = 3>0 \tag{1}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix} = 9-2=7>0 \tag{2}$$

$$
H_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 0 + 0 - 9 - 4 = 5 > 0 \tag{3}
$$

$$
H_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0 \tag{4}
$$

$$
\tag{5}
$$

となる。係数はすべて正で，フルビッツ行列の主座小行列式もすべて正であるため，すべての解の実部は負である。