平成 23 年度線形システム論 期末試験

問１． 次の 2 入力 1 出力 2 次の連続時間線形システム

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix}\\ y(t) &= (1,\ 0)\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+(0,\ -1)\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

に対して，初期値と入力を，

$$\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\qquad u_1(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ e^{-t} & (t\geq 0)\end{cases},\qquad u_2(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 0 & (t\geq 0)\end{cases}$$

とする。このとき，$x_1(t)$ および $x_2(t)$ をラプラス変換したもの，および出力 $y(t)$ を求めよ (計算過程も示すこと)。また，このシステムのブロック線図を記せ (初期値については記さなくてもよい)。

問２． 次の伝達関数の角周波数 ω に対する振幅，位相特性を式で表す (関数 arg を使ってよい) と共に，ボード線図 (振幅と位相の両方) を図示せよ。なお，図内に重要な数値を書き込むこと。

(1)

$$F(s)=\frac{100}{s+100}$$

(2)

$$F(s)=\frac{s+10000}{s+10}$$

問３． z 変換に関する次の問いに答えよ (導出過程も示すこと)。ただし，z 変換の対象となる離散時間領域の関数は $n\geq 0$ で定義されているものとする。

(1) 次の関数を z 変換せよ。

$$f(n)=1$$

(2) 次の関数を z 変換せよ。

$$f(n)=e^{\alpha n}$$

(3) 次の関数を z 変換せよ。

$$f(n)=\cos\omega n$$

(4) 次の関数を逆 z 変換せよ。

$$F(z)=\frac{5z-\frac{8}{5}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{5}\right)}$$

問４． 次の問に答えよ。

(1) 次の線形システムが可制御であるかどうか，可観測であるかどうか調べよ (計算過程および説明を記すこと)。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 2\end{pmatrix}u(t)\\ y(t) &= (2,\ 1,\ 0)\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}+2\cdot u(t)\end{aligned}$$

(2) 次の方程式の解の実部がすべて負であるかどうか調べよ。

$$s^4+s^3+2s^2+s+2=0$$

解答例

問１．

状態変数をラプラス変換したものは，次のように得られる (15 点)。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s+2 & -2 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{(s+2)(s+3)-2} \begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{s+3}{s+1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+4)} \begin{pmatrix} \frac{(s+3)^2}{s+1} \\ \frac{s+3}{s+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(s+3)^2}{(s+1)^2(s+4)} \\ \frac{s+3}{(s+1)^2(s+4)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

出力のラプラス変換は,

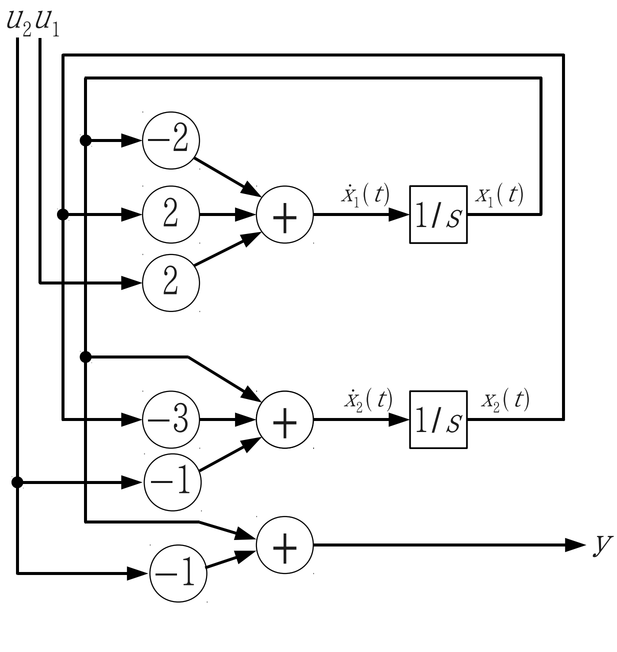
$$
\begin{aligned}
Y(s) &= (1,\ 0) \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} + (0,\ -1) \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} \\
&= (1,\ 0) \begin{pmatrix} \frac{(s+3)^2}{(s+1)^2(s+4)} \\ \frac{s+3}{(s+1)^2(s+4)} \end{pmatrix} + (0,\ -1) \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{(s+3)^2}{(s+1)^2(s+4)}
\end{aligned}
$$

となる。従って，出力 $y(t)$ は,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds} (s+1)^2 \frac{(s+3)^2}{(s+1)^2(s+4)} e^{st} \lim_{s\to -4} (s+4) \frac{(s+3)^2}{(s+1)^2(s+4)} e^{st} \\
&= -\lim_{s\to -1} \frac{2(s+3)(s+4)e^{st} + (s+3)^2(s+4)te^{st} - (s+3)^2 e^{st}}{(s+4)^2} - \lim_{s\to -4} \frac{s+3}{(s+1)^2} e^{st} \\
&= \frac{2(-1+3)(-1+4)e^{-t} + (-1+3)^2(-1+4)te^{-t} - (-1+3)^2 e^{-t}}{(-1+4)^2} + \frac{(-4+3)^2}{(-4+1)^2} te^{-4t} \\
&= \frac{8}{9} e^{-t} + \frac{4}{3} te^{-t} + \frac{1}{9} e^{-4t}
\end{aligned}
$$

となる (15 点)。

また，ブロック線図は以下の通りである (10 点)。



問 2 (10 点+10 点)

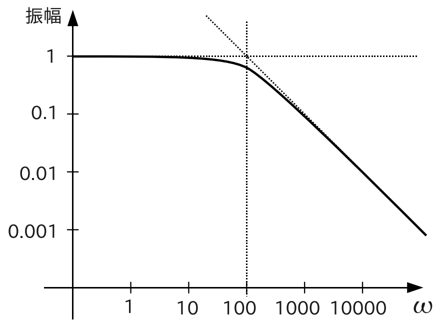
(1) 振幅特性は,

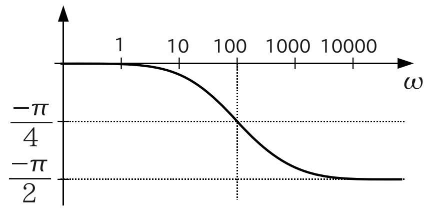
$$|F(i\omega)| = \frac{100}{\sqrt{\omega^2 + 100^2}}$$

位相特性は,

$$\arg(100 - i\omega)$$

となる。ボード線図は次のようになる。





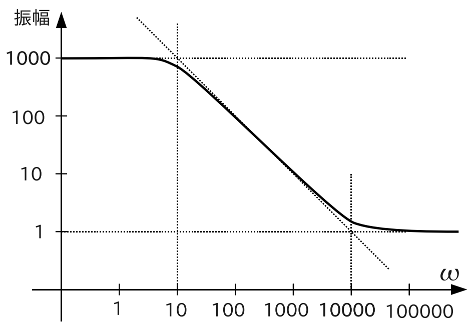
(1) 振幅特性は,

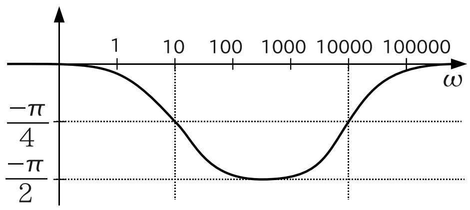
$$|F(i\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 10000^2}}{\sqrt{\omega^2 + 10^2}}$$

位相特性は,

$$\arg\left[(10000 + i\omega)(10 - i\omega)\right]$$

となる。ボード線図は次のようになる。





問 3 (5 点 ×3, 10 点)

(1)

$$\sum_{n=0} z^{-n} = \sum_{n=0} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

(2)

$$\sum_{n=0} e^{\alpha n} z^{-n} = \sum_{n=0} (e^{\alpha} z^{-1})^{-n} = \frac{1}{1 - e^{\alpha} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{\alpha}}$$

(3)

$$\sum_{n=0} (\cos \omega n) z^{-n} = \sum_{n=0} \frac{e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}}{2} z^{-n} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{i\omega}} + \frac{z}{z - e^{-i\omega}} \right) = \frac{z(z - e^{-i\omega} + z - e^{i\omega})}{2(z - e^{i\omega})(z - e^{-i\omega})} = \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

(4) $F(z)z^{n-1}$ の留数を計算すればよい。$n = 0$ のとき，極は $z = 0$, $z = 1/5$, $z = 1/2$ にある 1 位の極だけである。従って，

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{z \to 0} z \frac{5z - \frac{8}{5}}{z\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{5}\right)} + \lim_{z \to 1/5} \left(z - \frac{1}{5}\right) \frac{5z - \frac{8}{5}}{z\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{5}\right)} + \lim_{z \to 1/2} \left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{5z - \frac{8}{5}}{z\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{5}\right)} \\ &= \frac{-\frac{8}{5}}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)} + \frac{\frac{5}{5} - \frac{8}{5}}{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)} + \frac{\frac{5}{2} - \frac{8}{5}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)} \\ &= -16 + 9 + 10 = 0 \end{aligned}$$

$n \geq 1$ のとき，極は $z = 1/5$, $z = 1/2$ にある 1 位の極だけである。

$$\begin{aligned} f(n) &= \lim_{z \to 1/5} \left(z - \frac{1}{5}\right) \frac{5z - \frac{8}{5}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{5}\right)} z^{n-1} + \lim_{z \to 1/2} \left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{5z - \frac{8}{5}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{5}\right)} z^{n-1} \\ &= \frac{\frac{5}{5} - \frac{8}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{\frac{5}{2} - \frac{8}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

まとめると以下のようになる。

$$f(n) = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ 2\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

問 4

(1) (5 点+5 点)

可制御行列は,

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

となり，この行列式は 0 でランクが 3 とならないため可制御ではない。

可観測行列は,

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

となり，この行列式は 8 で，ランクがと 3 なるため可観測である。

(2) (5 点)

フルビッツ行列は,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。その主座小行列式は,

$$H_1 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad (1)$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0 \quad (2)$$

$$
\begin{aligned}
H_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 0 - 2 = -1 < 0 && (3) \\
H_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 < 0 && (4) \\
& && (5)
\end{aligned}
$$

となる。係数はすべて正であるが，フルビッツ行列の主座小行列式に負のものがあるため，実部が負となる解が存在する。