平成 23 年度線形システム論 期末試験

問１． 次の 2 入力 1 出力 2 次の連続時間線形システム

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (1,\ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + (-1,\ 0) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

に対して，初期値と入力を，

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-2t} & (t \geq 0) \end{cases}, \qquad u_2(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 0 & (t \geq 0) \end{cases}$$

とするとき，出力 $y(t)$ を求めよ (計算過程も示すこと)。

問２． 次の 1 入力 1 出力 2 次の離散時間線形システム ($k = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (1,\ 1) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + u(k)$$

に対して，初期値と入力を，

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u(k) = \begin{cases} 1 & (k = 1) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

とするとき，状態 $x_1(k)$，$x_2(k)$，出力 $y(k)$ を求めよ (計算過程も示すこと)。
ヒント：$k \geq 2$ では z 変換を使った方が楽であるが，$k = 0, 1$ では定義式を直接的に計算した方が楽である。

問３． 次の問に答えよ。

(1) 次の線形システムが可制御であるかどうか，可観測であるかどうか調べよ (計算過程および説明を記すこと)。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1,\ 0,\ 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + 3 \cdot u(t)$$

(2) 1 入力 1 出力の連続時間線形システムのラプラス変換で表した伝達関数の極と，そのシステムの有界入力有界出力安定性との関係を述べよ。

(3) 1 入力 1 出力の離散時間線形システムの z 変換で表した伝達関数の極と，そのシステムの有界入力有界出力安定性との関係を述べよ。

問４． 離散時間線形システムを記述するブロック線図の 3 つの要素に関して，その入出力関係を数式を用いて説明せよ。さらに，初期値に関しては無視して問 2 の線形システムのブロック線図を記せ。

解答例

問1．(25 点)

状態変数をラプラス変換したものは，次のように得られる。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & s+4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & s+4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+4)+2} \begin{pmatrix} s+4 & -2 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+2)^2(s+3)} \begin{pmatrix} s+4-2(s+2) \\ 1+(s+1)(s+2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-s}{(s+2)^2(s+3)} \\ \frac{s^2+3s+3}{(s+2)^2(s+3)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

出力のラプラス変換は,

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= (1,\ 0) \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} + (-1,\ 0) \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} \\
&= (1,\ 0) \begin{pmatrix} \frac{-s}{(s+2)^2(s+3)} \\ \frac{s^2+3s+3}{(s+2)^2(s+3)} \end{pmatrix} + (-1,\ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-s-(s+2)(s+3)}{(s+2)^2(s+3)} \\
&= -\frac{s^2+6s+6}{(s+2)^2(s+3)}
\end{aligned}
$$

となる。従って，出力は,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= -\lim_{s\to-2} \frac{d}{ds}(s+2)^2 \frac{s^2+6s+6}{(s+2)^2(s+3)} e^{st} - \lim_{s\to-3} (s+3) \frac{s^2+6s+6}{(s+2)^2(s+3)} e^{st} \\
&= -\lim_{s\to-2} \left[\frac{(2s+6)(s+3)-(s^2+6s+6)}{(s+3)^2} e^{st} - \frac{s^2+6s+6}{s+3} te^{st} \right] - \lim_{s\to-3} \frac{s^2+6s+6}{(s+2)^2} e^{st} \\
&= -\frac{(-4+6)(-2+3)-(4-12+6)}{(-2+3)^2} e^{-2t} - \frac{4-12+6}{-2+3} te^{-2t} - \frac{9-18+6}{(-3+2)^2} e^{-3t} \\
&= -4e^{-2t} + 2te^{-2t} + 3e^{-3t}
\end{aligned}
$$

となる。

問2．(25 点)

入力を z 変換した $U(z)$ は，次のようになる。

$$U(z) = z^{-1}$$

状態変数を z 変換したものは次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{pmatrix} &= z \begin{pmatrix} z-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & z-\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & z-\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} z^{-1} \\
&= \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{16}} \begin{pmatrix} z-\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & z-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{-1} \\ z \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{z\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{3}{4}\right)} \begin{pmatrix} z-\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & z-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{z\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{3}{4}\right)} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}z^2+z-\frac{1}{2} \\ z^3-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

この式に z^{k-1} をかけたものの留数を考えれば良い。$k \geq 2$ のときは，$z = \frac{1}{4}$ と $z = \frac{3}{4}$ に位数 1 の極を持つ。従って，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} \\ \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{15}{32}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} + \frac{25}{32}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} \\ -\frac{15}{32}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} + \frac{25}{32}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{15}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} + \frac{25}{18}\left(\frac{3}{4}\right)^{k} \\ -\frac{15}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} + \frac{25}{18}\left(\frac{3}{4}\right)^{k} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。$k = 1$ は定義式から計算して，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 0 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$k = 0$ のときは，初期値であるから，次のようにまとめることができる。

$$
\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (k = 0) \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} & (k = 1) \\ \begin{pmatrix} \frac{15}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} + \frac{25}{18}\left(\frac{3}{4}\right)^{k} \\ -\frac{15}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} + \frac{25}{18}\left(\frac{3}{4}\right)^{k} \end{pmatrix} & (k \geq 2) \end{cases}
$$

出力は，状態からもとの式で計算すれば，以下のようになる。

$$
y(k) = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ \frac{7}{4} & (k = 1) \\ \frac{25}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{k} & (k \geq 2) \end{cases}
$$

問 3

(1) (10+10 点)

可制御行列は，

$$
\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}
$$

となり，この行列式は -4 でなくランクが 3 となるため可制御である。

可観測行列は，

$$
\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}
$$

となり，この行列式は 0 で，ランクも 2 となるため可観測ではない。

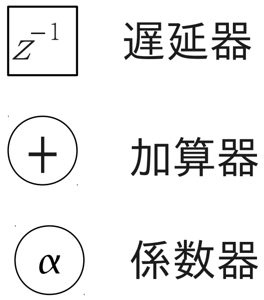
(2) (5 点)

伝達関数の極の実部が負であること。

(3) (5 点)

伝達関数の極の絶対値が 1 未満であること。

問 4．(9+11 点)



線形システムのブロック線図の要素は，上図に示す加算器，係数器，遅延分器からなる (上図は書かなくても良い)。加算器は，複数の入力 $u_k(k)$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ の和

$$\sum_{k=1}^{r} u_k(k)$$

を出力とするものである。計数器は入力 $u(k)$ に対して，それを定数 α 倍した

$$\alpha u(k)$$

を出力とするものである。遅延器は，離散時刻 k における入力 $u(k)$ に対して，直前の入力

$$u(k-1)$$

を出力とするものである。z 変換では，

$$z^{-1}U(z)$$

を出力する。

問 1 のシステムをブロック線図で表したものは次のようになる。