線形システム論 期末試験

問１． 次の 2 入力 1 出力 2 次の連続時間の線形システム

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \\
y(t) &= (1,\ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + (0,\ 1) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

に対して，初期値と入力を，

$$
\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 0 & (t \geq 0) \end{cases}, \qquad u_2(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-2t} & (t \geq 0) \end{cases}
$$

とするとき，状態変数 $x_1(t)$，$x_2(t)$ および出力 $y(t)$ を求めよ (計算過程も示すこと)。

問２． 次の 1 入力 1 出力 2 次の離散時間の線形システム $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k) \\
y(k) &= (1,\ 1) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + 2 \cdot u(k)
\end{aligned}
$$

に対して，初期値と入力を，

$$
\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u(k) = \begin{cases} 0 & (k \leq 0 \text{ or } k \geq 2) \\ 1 & (k = 1) \end{cases}
$$

とするとき，出力 $y(k)$ を求めよ (計算過程も示すこと)。
ヒント：$k \geq 2$ では z 変換を使った方が楽であるが，$k = 0, 1$ では定義式を直接的に計算した方が楽である。

問３． 次の問に答えよ (計算過程および説明を記すこと)。

(1) 次の線形システムが可制御であるかどうか，可観測であるかどうか調べよ。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\
y(t) &= (1,\ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + 3 \cdot u(t)
\end{aligned}
$$

(2) 次の方程式の解の実数部分がすべて負であるかどうか，フルビッツの方法を使って調べよ。

$$
f(s) \equiv s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = 0
$$

(3) 次の方程式の解の絶対値すべて 1 未満であるかかどうか，双 1 次変換とフルビッツの方法を使って調べよ。

$$
g(z) \equiv 4z^3 + 2z - 1 = 0
$$

問４． 連続時間の線形システムを記述するブロック線図の 3 つの要素に関して，その入出力関係を数式を用いて説明せよ。さらに，問 1 の線形システムのブロック線図を記せ。

謝辞：問 4 は，中谷君の問題を参考にしました (13 回目の演習による最終点への加点は，良問多数のため，採用・不採用だけではなく，作成された問題に応じて行うことにしました)。

解答例

問１.

状態変数をラプラス変換したものは，次のように得られる。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s+3 & -1 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s+3 & -1 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(s+3)(s+3)-1} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 1 & s+3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{(s+2)(s+4)} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 1 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+2)^2(s+4)} \\ \frac{s+3}{(s+2)^2(s+4)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

これを逆ラプラス変換する。e^{st} をかけて留数和を計算すればよい。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lim_{s\to-2} \frac{d}{ds}(s+2)^2 \frac{e^{st}}{(s+2)^2(s+4)} + \lim_{s\to-4}(s+4)\frac{e^{st}}{(s+2)^2(s+4)} \\ \lim_{s\to-2} \frac{d}{ds}(s+2)^2 \frac{(s+3)e^{st}}{(s+2)^2(s+4)} + \lim_{s\to-4}(s+4)\frac{(s+3)e^{st}}{(s+2)^2(s+4)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lim_{s\to-2} \frac{te^{st}(s+4)-e^{st}}{(s+4)^2} + \lim_{s\to-4} \frac{e^{st}}{(s+2)^2} \\ \lim_{s\to-2} \frac{(e^{st}+(s+3)te^{st})(s+4)-(s+3)e^{st}}{(s+4)^2} + \lim_{s\to-4} \frac{(s+3)e^{st}}{(s+2)^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{te^{-2t}(-2+4)-e^{-2t}}{(-2+4)^2} + \frac{e^{-4t}}{(-4+2)^2} \\ \frac{(e^{-2t}+(-2+3)te^{-2t})(-2+4)-(-2+3)e^{st}}{(-2+4)^2} + \frac{(-4+3)e^{st}}{(-4+2)^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2te^{-2t}-e^{-2t}+e^{-4t}}{4} \\ \frac{2te^{-2t}+e^{-2t}-e^{-4t}}{4} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

出力は，

$$\begin{aligned}
y(t) &= (1,\ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + (0,\ 1) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = x_1(t) + u_2(t) \\
&= \frac{2te^{-2t} - e^{-2t} + e^{-4t}}{4} + e^{-2t} = \frac{2te^{-2t} + 3e^{-2t} + e^{-4t}}{4}
\end{aligned}$$

問２.

入力を z 変換した $U(z)$ は，次のようになる。

$$U(z) = z^{-1}$$

状態変数を z 変換したものは次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{pmatrix} &= z \begin{pmatrix} z-1 & 1 \\ -1 & z+\frac{3}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z-1 & 1 \\ -1 & z+\frac{3}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} U(z) \\
&= \frac{1}{(z-1)\left(z+\frac{3}{2}\right)+1} \begin{pmatrix} z+\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & z-1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{(z+1)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} z+\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & z-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{z^2+1}{z} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\left(z+\frac{3}{2}\right)(z^2+1)}{z(z+1)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \\ \frac{(z^2+1)}{z(z+1)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

従って，出力を z 変換した $Y(z)$ は，次のようになる。

$$\begin{aligned}
Y(z) &= (1,\ 1) \begin{pmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{pmatrix} + 2U(z) \\
&= \frac{\left(z+\frac{5}{2}\right)(z^2+1) + 2(z+1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}{z(z+1)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{z^3 + \frac{9}{2}z^2 + 2z + \frac{3}{2}}{z(z+1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

逆 z 変換する。$y(k)$ は，上式に z^{k-1} をかけたものの留数和となる。$k \geq 2$ のとき，極は $z=-1$ と $z=\frac{1}{2}$ に 1 位の極があるだけである。従って，

$$
\begin{aligned}
y(k) &= \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^3+\frac{9}{2}z^2+2z+\frac{3}{2}}{z(z+1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}z^{k-2}+\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{z^3+\frac{9}{2}z^2+2z+\frac{3}{2}}{z(z+1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}z^{k-2} \\
&= \frac{\left((-1)^3+\frac{9}{2}(-1)^2+2(-1)+\frac{3}{2}\right)(-1)^{k-2}}{\left(-1-\frac{1}{2}\right)}+\frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}}{\frac{1}{2}+1} \\
&= 2(-1)^{k-1}+5\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

となる。$k=0$ のときは，次のようになる。

$$
y(0)=(1,\ 1)\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}+2\cdot u(0)=1
$$

$k=1$ のときは，

$$
\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u(0)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

より，

$$
y(1)=(1,\ 1)\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix}+2\cdot u(1)=4
$$

となる。まとめれば，以下のようになる。

$$
y(k)=\begin{cases} 1 & (k=0) \\ 4 & (k=1) \\ 2(-1)^{k-1}+5\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} & (k\geq 2) \end{cases}
$$

問 3

(1)

可制御行列は，

$$
\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}
$$

となり，この行列式は 0 でなくランクが 2 となるため可制御である。

可観測行列は，

$$
\left((1,\ 0)^T,\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^T(1,\ 0)^T\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

となり，この行列式は 0 でなくランクが 2 となるため可観測である。

(2)

$$
f(s)\equiv s^2+2s^2+2s+1=0
$$

のフルビッツ行列は，

$$
H=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

となる。多項式の係数がすべて正であり，その主座小行列式

$$
H_1=\begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix}=2>0,\qquad H_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3>0,\qquad H_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=3>0
$$

がすべて正であるので，その解の実数部分はすべて負である。

(3) 双 1 次変換を行うと，

$$g_1(s) \equiv 4\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^3 + 2\left(\frac{1+s}{1-s}\right) - 1 = 0$$

となる。この分子となる多項式からなる方程式

$$g_2(s) = 4(1+s)^3 + 2(1+s)(1-s)^2 - (1-s)^3 = 7s^3 + 7s^2 + 13s + 5 = 0$$

の解の実数部分が負であることを示せばよい。方程式の s^3 の係数を 1 する。

$$s^3 + s^2 + \frac{13}{7}s + \frac{5}{7} = 0$$

このフルビッツ行列は,

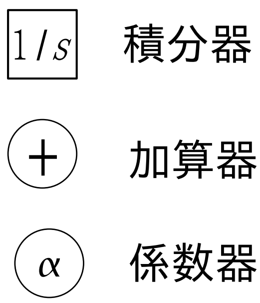
$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{7} & 0 \\ 1 & \frac{13}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

となる。多項式の係数がすべて正であり，その主座小行列式

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \\ H_2 &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{7} \\ 1 & \frac{13}{7} \end{vmatrix} = \frac{8}{7} > 0, \\ H_3 &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{7} & 0 \\ 1 & \frac{13}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{13}{7} \cdot \frac{5}{7} - 1 \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{40}{49} > 0 \end{aligned}$$

がすべて正であるので，その解の実数部分はすべて負である。従って，$g(z) = 0$ の解の絶対値は 1 未満となる。

問４.



　線形システムのブロック線図の要素は，上図に示す加算器，係数器，積分器からなる (上図は書かなくても良い)。加算器は，複数の入力 $u_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ の和

$$\sum_{k=1}^{r} u_k(t)$$

を出力とするものである。計数器は入力 $u(t)$ に対して，それを定数 α 倍した

$$\alpha u(t)$$

を出力とするものである。積分器は，入力 $u(t)$ の時間 $-\infty$ から現在 t までの積分値

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau$$

を出力とするものである。教科書通りに

$$u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{u}(\tau) d\tau$$

と書いても良い。(はじめのプリントが間違っていましたので，その通りに書いても正解とします。)

問１のシステムをブロック線図で表したものは次のようになる。