線形システム論 中間試験

- １問を解答用紙１枚を使って解答して下さい。裏面を使っても良いです。
- 学籍番号と氏名はすべての解答用紙に記入して下さい。
- 途中の計算も必ず書いてください。
- 配点は予定です。

問１． 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

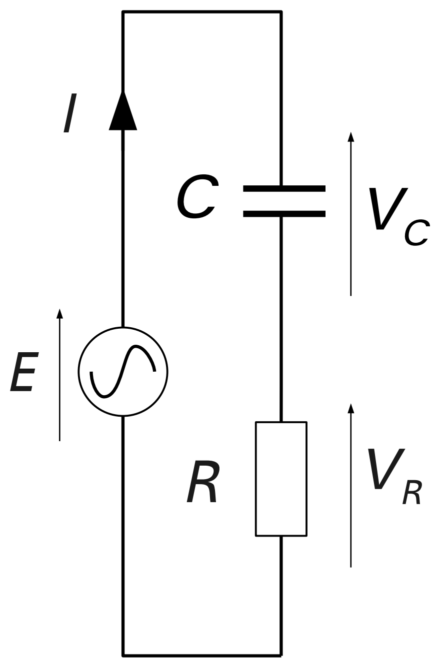
とおく。A の固有値と固有ベクトルを求め，変数 t に対して，

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$$

を求めよ。また，次の１次方程式をクラメルの方法を使って解け。(10+5 点)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

問２． 次の CR 回路において $\arg(E) = 0$ rad とし，**(1)** E，V_C，V_R をフェーザー図で示せ。**(2)** V_R の位相は，E に比べて進んでいるか遅れているか，(1) の結果を用いて答えよ。**(3)** $|E| = 100$V，$R = 200\Omega$，$C = 1\mu F = 0.000001F$ とする。角周波数 ω に対する，抵抗にかかる電圧 V_R のボード線図 (振幅図と位相図) を図示せよ。なお，図内に重要な数値や補助線を書き込むこと。$(5+5+(5+5) = 20$ 点)



問３． 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された次の関数 $x(t)$ を，実数表示（cos と sin の和を使う式）でフーリエ級数展開せよ。(係数を求める式と展開式の両方を示す。できるだけ簡単に表すこと。) (15 点)

$$x(t) = \begin{cases} 1 & (-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

問４． ラプラス変換に関する次の問いに答えよ。$(5 \times 8 + 10 = 50$ 点)

(1) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = -2u(t) \qquad (u(t)\text{:単位ステップ関数})$$

(2) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{3t}$$

(3) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \sin 3t$$

(4) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = 3t^4$$

(5) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 2\pi) \\ \sin t & (t \ge 2\pi) \end{cases}$$

(6) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = t^2 \sin 3t$$

(7) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-3t} t^2 \sin 3t$$

(8) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = 4e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

(9) 次の関数を，部分分数展開を使って逆ラプラス変換しなさい (その導出過程を詳しく書くこと)。

$$F(s) = \frac{6s^2 + 25s + 25}{(s+2)^2(s+3)}$$

解答例

問 1．

固有値は，

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

より，

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda-8 & -9 \\ 6 & \lambda+7 \end{vmatrix} = (\lambda-8)(\lambda+7)-(-6)(9) = \lambda^2-\lambda-2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$$

となり，固有値は -1 と 2 となる。
固有値 -1 に対する固有ベクトルは，

$$\begin{pmatrix} -1-8 & -9 \\ 6 & -1+7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -9 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

より，例えば，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

で与えることができる。固有値 2 に対する固有ベクトルは，

$$\begin{pmatrix} 2-8 & -9 \\ 6 & 2+7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

より，例えば，

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

で与えることができる。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

が成立する。従って，

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[P \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} P^{-1} \right]^n \\ &= P \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-t)^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(2t)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^{-t} & -3e^{-t} \\ e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2e^{-t}+3e^{2t} & -3e^{-t}+3e^{2t} \\ 2e^{-t}-2e^{2t} & 3e^{-t}-2e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。クラメルの公式を使えば，

$$|A| = (1)(1)(3) + (-2)(1)(3) + (3)(2)(1) - (1)(1)(1) - (-2)(2)(3) - (3)(1)(3) = 5$$

より，

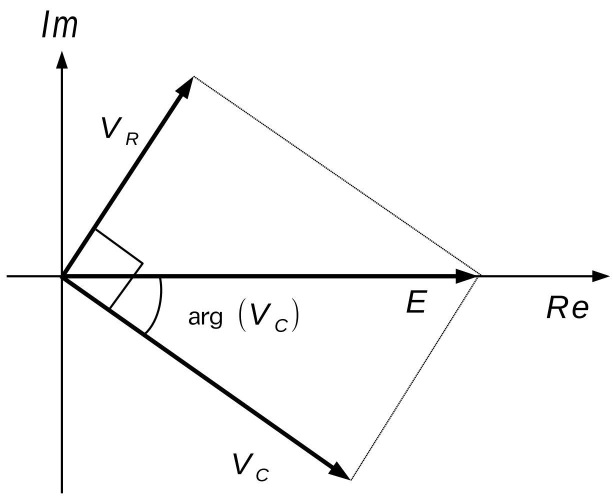
$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \\
x_2 &= \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \\
x_3 &= \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1
\end{aligned}
$$

となる。

問２.

(1)

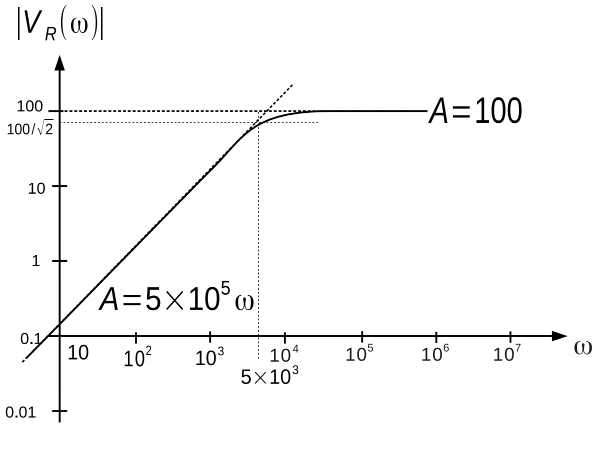
抵抗の電圧と電流の位相は同じ。キャパシターの電圧の位相は電流よりも $\pi/2$ 進む。また，フェーザ表現で，抵抗とキャパシタの電圧の和は電源電圧に等しいから，下のように描ける。



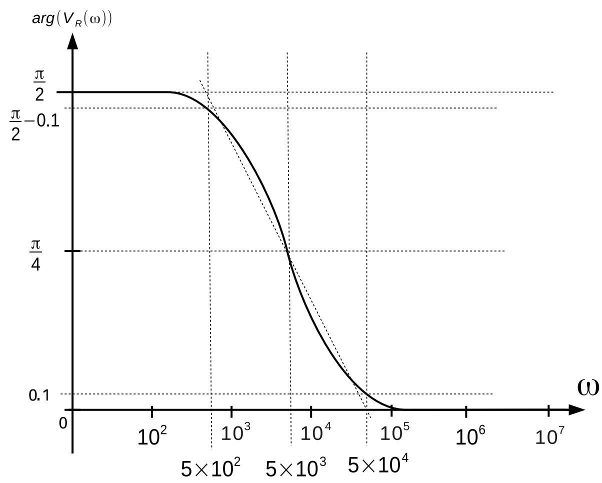
フェーザー図

(2) 図 1 より，進んでいる。

(3)



振幅図



位相図

V_C は，

$$
V_C = \frac{RE}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{E}{1 + \frac{1}{i\omega CR}}
$$

となる。$\omega_0 = \frac{1}{CR} = 5 \times 10^3 \mathrm{rad/s}$ とおく。V_R の振幅は，

$$|V_R| = \frac{|E|}{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega CR)^2}}} = \frac{|E|}{\sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

となる，$\omega \ll \omega_0$ で $|V_R|$ は

$$|V_R| \simeq |E|\frac{\omega}{\omega_0}$$

と近似できるので，振幅図では傾き 1 の直線になる。$\omega \gg \omega_0$ では，$|E|$ で一定である。$\omega = \omega_0$ はカットオフ周波数で，

$$|V_R| = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

位相は，

$$\arg(V_R) = \arg(E) - \arg\left(1 - i\frac{\omega_0}{\omega}\right) = \tan^{-1}\frac{\omega_0}{\omega}$$

となる。となる，$\omega \ll \omega_0$ で $\arg(V_C)$ は $\pi/2$ で一定である。$\omega \gg \omega_0$ で $\arg(V_C)$ は 0 で一定である。また，$\omega = 0.1\omega_0$ で $\arg(V_C) \simeq \pi/2 - 0.1$，$\omega = \omega_0$ で $\arg(V_C) = \pi/4$，$\omega = 10\omega_0$ で $\arg(V_C) \simeq 0.1$ となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

問 3．

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1dt = \frac{1}{4}$$

$n \geq 1$ のとき，

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{2\pi}\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{\pi n}\left(\sin\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{-n\pi}{4}\right) \\
&= \frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{4} \\
&= \begin{cases} 0 & (n = 4k) \\ \frac{\sqrt{2}(-1)^k}{\pi(4k+1)} & (n = 4k+1) \\ \frac{2(-1)^k}{\pi(4k+2)} & (n = 4k+2) \\ \frac{\sqrt{2}(-1)^k}{\pi(4k+3)} & (n = 4k+3) \end{cases}
\end{aligned}$$

b_n は，

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{2\pi}\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin(nt)dt
\end{aligned}$$

となり，$\sin(nt)$ が奇関数であるから，$b_n = 0$ となる。

$$x(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt{2}\cos((4k+1)t) + 2\cos((4k+2)t) + \sqrt{2}\cos((4k+3)t)\right)$$

問 4．

(1)

$$F(s) = -\frac{2}{s}$$

(2)

$$F(s)=\frac{1}{s-3}$$

(3)

$$F(s)=\frac{3}{s^2+9}$$

(4)

$$F(s)=\frac{72}{s^5}$$

(5)

$\frac{3}{s^2+9}$ を t 方向に 2π だけ平行移動したものである。

$$F(s)=\frac{3e^{-3s}}{s-2}$$

(6)

$$F(s)=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\frac{3}{s^2+9}=\frac{d}{ds}\frac{-6s}{(s^2+9)^2}=\frac{18s^2-54}{(s^2+9)^3}=\frac{18(s^2-3)}{(s^2+9)^3}$$

(7)

$$F(s)=\frac{18((s+3)^2-3)}{((s+3)^2+9)^3}=\frac{18(s^2+6s+6)}{(s+6s+18)^3}=\frac{18s^2+108s+108}{(s+6s+18)^3}$$

(8)

$$F(s)=\frac{4}{s+2}+\frac{2}{s+3}=\frac{6s+16}{s^2+5s+6}$$

(9)

まず，部分分数展開を行う。

$$F(s)=\frac{6s^2+25s+25}{(s+2)^2(s+3)}=\frac{a}{(s+2)}+\frac{b}{(s+2)^2}+\frac{c}{s+3}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}&\frac{a}{(s+2)}+\frac{b}{(s+2)^2}+\frac{c}{s+3}\\ =\;&\frac{a(s+2)(s+3)+b(s+3)+c(s+2)^2}{(s+2)^2(s+3)}\\ =\;&\frac{(a+c)s^2+(5a+b+4c)s+(6a+3b+4c)}{(s+2)^2(s+3)}\end{aligned}$$

となるので，次の連立方程式が成立する。

$$\begin{cases}a+c&=&6\\5a+b+4c&=&25\\6a+3b+4c&=&25\end{cases}$$

これを解くと，$a=2, b=-1, c=4$ となる。従って，

$$F(s)=\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{(s+2)^2}+\frac{4}{s+3}$$

となるので，

$$f(t)=2e^{-2t}-te^{-2t}+4e^{-3t}$$

となる。