線形システム論 中間試験

- １問を解答用紙１枚を使って解答して下さい。裏面を使っても良いです。
- 学籍番号と氏名はすべての解答用紙に記入して下さい。
- 途中の計算も必ず書いてください。
- 配点は予定です。

問１． 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -45 \\ 6 & -17 \end{pmatrix}$$

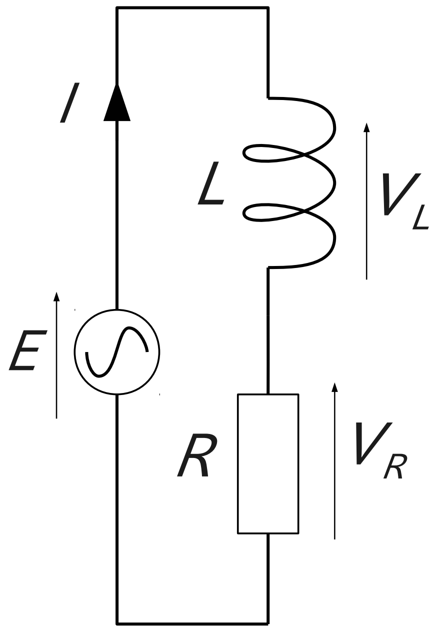
とおく。A の固有値と固有ベクトルを求め，変数 t に対して，

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$$

を求めよ。また，次の行列の余因子行列を求めよ。(10+5 点)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

問２． 次の LR 回路において $\arg(E) = 0$ rad とし，**(1)** E，V_L，V_R をフェーザー図で示せ。**(2)** $|E| \leq |V_L| + |V_R|$ が成立することを，(1) の結果を用いて説明せよ。**(3)** $|E| = 100\text{V}$，$R = 10\Omega$，$L = 0.0001H$ とする。角周波数 ω に対する，抵抗にかかる電圧 V_L のボード線図 (振幅図と位相図) を図示せよ。なお，図内に重要な数値や補助線を書き込むこと。$(5 + 5 + 5 + 5 = 20$ 点)



問３． 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された次の関数 $x(t)$ を，複素数表示でフーリエ級数展開せよ。(係数を求める式と展開式の両方を示す。) (15 点)

$$x(t) = \begin{cases} 1 & (-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

問４． ラプラス変換に関する次の問いに答えよ。$(5 \times 8 + 10 = 50$ 点)

(1) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = 3u(t) \qquad (u(t)\text{:単位ステップ関数})$$

(2) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{2t}$$

(3) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \sin 2t$$

(4) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = 5t^3$$

(5) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 3) \\ 3e^{2t} & (t \geq 3) \end{cases}$$

(6) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = t \cos 2t$$

(7) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-3t} \cos 2t$$

(8) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-3t} t \cos 2t$$

(9) 次の関数を，部分分数展開を使って逆ラプラス変換しなさい (その導出過程を詳しく書くこと)。

$$F(s) = \frac{2s^2 + 16s + 26}{(s+1)(s+3)^2}$$

解答例

問 1．

固有値は，

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

より，

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda - 16 & 45 \\ -6 & \lambda + 17 \end{vmatrix} = (\lambda - 16)(\lambda + 17) - (-6)(45) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$$

となり，固有値は 1 と -2 となる。

固有値 1 に対する固有ベクトルは，

$$\begin{pmatrix} 1-16 & 45 \\ -6 & 1+17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 45 \\ -6 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

より，例えば，

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えることができる。固有値 -2 に対する固有ベクトルは，

$$\begin{pmatrix} -2-16 & 45 \\ -6 & -2+17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 45 \\ -6 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

より，例えば，

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

で与えることができる。

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

が成立する。従って，

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[P \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -2t \end{pmatrix} P^{-1} \right]^n \\ &= P \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(t)^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-2t)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^t & -5e^t \\ -e^{-2t} & 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6e^t - 5e^{-2t} & -15e^t + 15e^{-2t} \\ 2e^t - 2e^{-2t} & -5e^t + 6e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

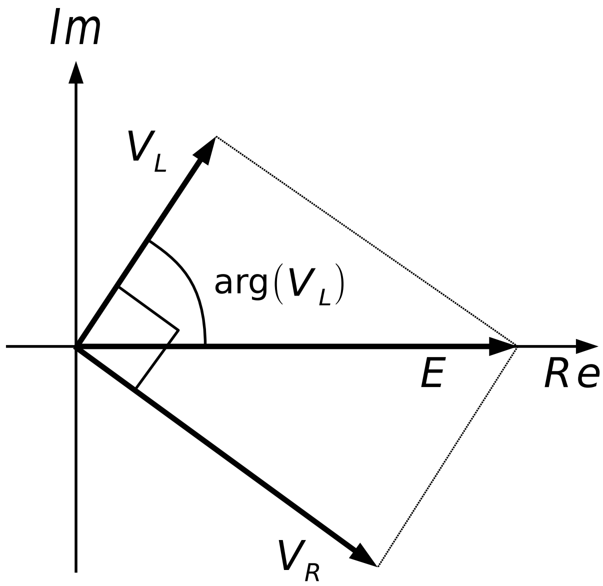
となる。

余因子行列は

$$
\begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-4 & 3 & -1 \\
-3 & -1 & -4 \\
-2 & -5 & 6
\end{pmatrix}
$$

問２.

(1)



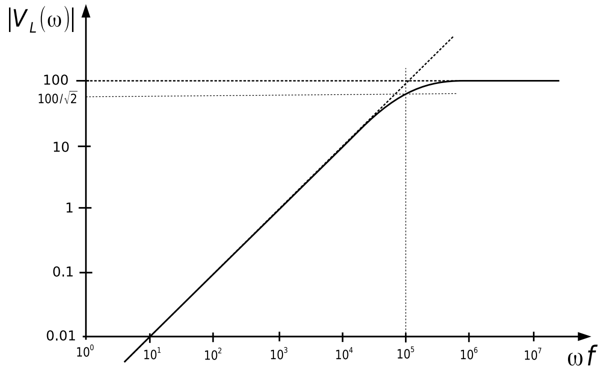
フェーザー図

(2)

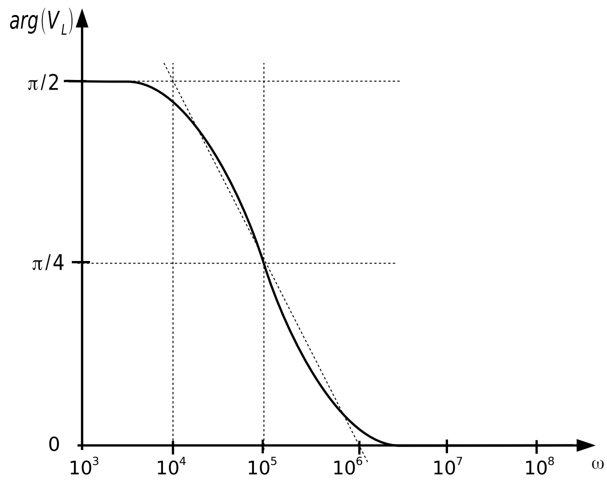
たとえば，V_L を V_R の先端までの平行移動させれば，E，V_R，V_R を平行移動したもので三角形をなすことができる。それぞれの辺の長さが $|E|$，$|V_R|$，$|V_R|$ となるから，三角不等式より，$|E| \leq |V_R| + |V_R|$ となる。

等号が成立する場合は，三角形を形成しない場合であるから，$V_L = 0$ または $V_R = 0$ であり，$L = 0$ または $R = 0$ または $\omega = 0$ または $|E| = 0$ である。

(3)



振幅図



位相図

V_L は，

$$V_L = \frac{i\omega LE}{R + i\omega L}$$

となる。$\omega_0 = \frac{R}{L} = 10^5\mathrm{rad/s}$ とおく。V_L の振幅は，

$$|V_L| = \frac{\omega L|E|}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} = \frac{|E|}{\sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

となる，$\omega \gg \omega_0$ で $|V_L|$ は $|E|$ で一定である。$\omega \ll \omega_0$ では，

$$|V_L| \simeq \frac{\omega}{\omega_0}$$

と近似できるので，振幅図では傾き 1 の直線になる。$\omega = \omega_0$ はカットオフ周波数で，

$$|V_L| = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

位相は，

$$\arg(V_L) = \arg(E) - \arg\left(1 - i\frac{\omega_0}{\omega}\right) = \tan^{-1}\frac{\omega_0}{\omega}$$

となる。となる，$\omega \ll \omega_0$ で $\arg(V_L)$ は $\pi/2$ で一定である。$\omega \gg \omega_0$ で $\arg(V_L)$ は 0 で一定である。また，$\omega = 0.1\omega_0$ で $\arg(V_L) \simeq \pi/2 - 0.1$，$\omega = \omega_0$ で $\arg(V_L) = \pi/4$，$\omega = 10\omega_0$ で $\arg(V_L) \simeq 0.1$ となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

問３.

$n = 0$ のときは，

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1dt = \frac{1}{2}$$

$n \neq 0$ のときは，

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-\frac{2\pi i}{2\pi}nt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-1}{in}e^{-int}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2\pi in}\left(-e^{-in\pi/2} + e^{in\pi/2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi n}\left(\sin(n\pi/2)\right) \\
&= \begin{cases} 0 & (n \text{ is even}) \\ \frac{(-1)^k}{\pi n} & (n = 2k+1) \end{cases}
\end{aligned}$$

となる。従って次式が成立する。

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}e^{i(2k+1)t}$$

展開係数が 0 となるのは，n が 0 以外の偶数になるときである。

問４.

(1)

$$F(s) = \frac{3}{s}$$

(2)

$$F(s) = \frac{1}{s-2}$$

(3)

$$F(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

(4)

$$F(s) = \frac{30}{s^4}$$

(5)

$3e^6e^{2t}$ を t 方向に 3 だけ平行移動したものである。

$$F(s) = \frac{3e^6e^{-3s}}{s-2}$$

(6)

$$F(s) = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+4} = -\frac{s^2+4-s(2s)}{(s^2+4)^2} = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

(7)

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+3)^2+4} = \frac{s+3}{s^2+6s+13}$$

(8)

$$F(s) = -\frac{d}{ds}\frac{s+3}{s^2+6s+13} = -\frac{s^2+6s+13-(s+3)(2s+6)}{(s^2+6s+13)^2} = \frac{s^2+6s+5}{(s^2+6s+13)^2}$$

(9)

まず，部分分数展開を行う。

$$F(s) = \frac{2s^2+16s+26}{(s+1)(s+3)^2} = \frac{a}{(s+1)} + \frac{b}{s+3} + \frac{c}{(s+3)^2}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} & \frac{a}{(s+1)} + \frac{b}{s+3} + \frac{c}{(s+3)^2} \\ = \quad & \frac{a(s+3)^2 + b(s+1)(s+3) + c(s+1)}{(s+1)(s+3)^2} \\ = \quad & \frac{(a+b)s^2 + (6a+4b+c)s + (9a+3b+c)}{(s+1)(s+3)^2} \end{aligned}$$

となるので，次の連立方程式が成立する。

$$\begin{cases} a+b &= 2 \\ 6a+4b+c &= 16 \\ 9a+3b+c &= 26 \end{cases}$$

これを解くと，$a=3, b=-1, c=2$ となる。従って，

$$F(s) = \frac{3}{s+1} + \frac{-1}{s+3} + \frac{2}{(s+3)^2}$$

となるので，

$$f(t) = 3e^{-t} - e^{-3t} + 2te^{-3t}$$

となる。