線形システム論 中間試験

- １問を解答用紙１ページを使って解答して下さい。裏面を使っても良いです。
- 途中の計算も必ず書いてください。
- 配点は予定です。

問１． 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 27 & -50 \\ 15 & -28 \end{pmatrix}$$

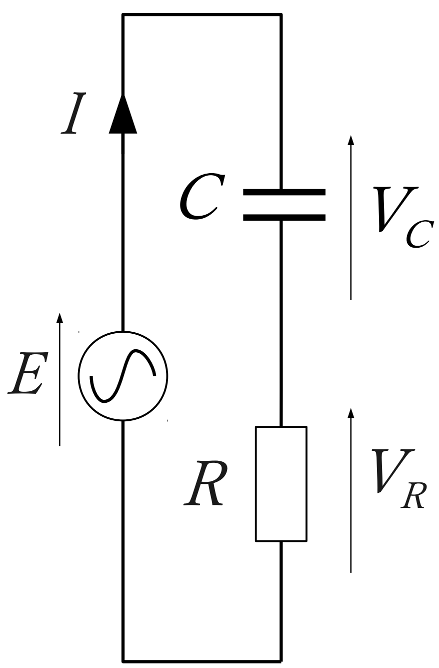
とおく。A の固有値と固有ベクトルを求め，変数 t に対して，

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$$

を求めよ。また，次の方程式をクラメルの公式を使って解け。(10+5 点)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問２． 次の CR 回路において，電源の角周波数を ω，位相 $\arg(E)$ を 0 rad とするとき，次の問いに答えよ。**(1)** 抵抗にかかる電圧 V_R のフェーザー表現と，その振幅と位相を求めよ。**(2)** E，V_C，V_R をフェーザー図で示せ。**(3)** $|E| \leq |V_C| + |V_R|$ が成立することを，(2) の結果を用いて説明せよ。**(4)** $|E| = 100\mathrm{V}$，$R = 10\Omega$，$C = 0.00001F$ とする。ω に対する，V_R のボード線図 (振幅図と位相図) を図示せよ。なお，図内に重要な数値や補助線を書き込むこと。((3+3+3)+3+2+(3+3) = 20 点)



問３． ある角周波数 $\omega_0 (> 0)$ を定めたとき，フーリエ変換した関数を，

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & (-\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

で与える。この関数を逆フーリエ変換せよ。また，求めた関数の値が 0 にるなる時刻を，すべて求めよ。(10 + 5=15 点)

問４． ラプラス変換に関する次の問いに答えよ。($5 \times 8 + 10 = 50$ 点)

(1) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = 2u(t) \qquad (\text{単位ステップ関数の 2 倍})$$

(2) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \mathrm{e}^{-2t}$$

(3) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \cos 4t$$

(4) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = 3t^2$$

(5) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 4) \\ 3e^{-2t} & (t \geq 4) \end{cases}$$

(6) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = t \sin 3t$$

(7) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \mathrm{e}^{-2t} \sin 3t$$

(8) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \mathrm{e}^{-2t} t \sin 3t$$

(9) 次の関数を，部分分数展開を使って逆ラプラス変換しなさい (その導出過程を詳しく書くこと)。

$$F(s) = \frac{3s^2 + 11s + 7}{(s+2)^2(s+3)}$$

解答例

問１.

固有値は,
$$\det(\lambda I - A) = 0$$
より,
$$0 = \begin{vmatrix} \lambda - 27 & 50 \\ -15 & \lambda + 28 \end{vmatrix} = (\lambda - 27)(\lambda - 28) - (-15)(50) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$
となり，固有値は 2 と −3 となる。

固有値 2 に対する固有ベクトルは,
$$\begin{pmatrix} 2 - 27 & 50 \\ -15 & 2 + 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$
より，例えば,
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
で与えることができる。固有値 −3 に対する固有ベクトルは,
$$\begin{pmatrix} -3 - 27 & 50 \\ -15 & -3 + 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$
より，例えば,
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$
で与えることができる。
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
とおけば,
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
となる。
$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$$
が成立する。従って,
$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[P \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & -3t \end{pmatrix} P^{-1} \right]^n \\
&= P \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(2t)^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-3t)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{2t} & -5\mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^{-3t} & 2\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\mathrm{e}^{2t} - 5\mathrm{e}^{-3t} & -10\mathrm{e}^{2t} + 10\mathrm{e}^{-3t} \\ 3\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^{-3t} & -5\mathrm{e}^{2t} + 6\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。クラメルの公式を使えば,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{3}$$

問２.

(1) フェーザー表現 V_R は，$\omega_0 = 1/(CR)$ とおけば,

$$V_R = \frac{RE}{R + \frac{1}{i\omega C}} \quad = \frac{E}{1 - i\frac{\omega_0}{\omega}}$$

となる。したがって，振幅は,

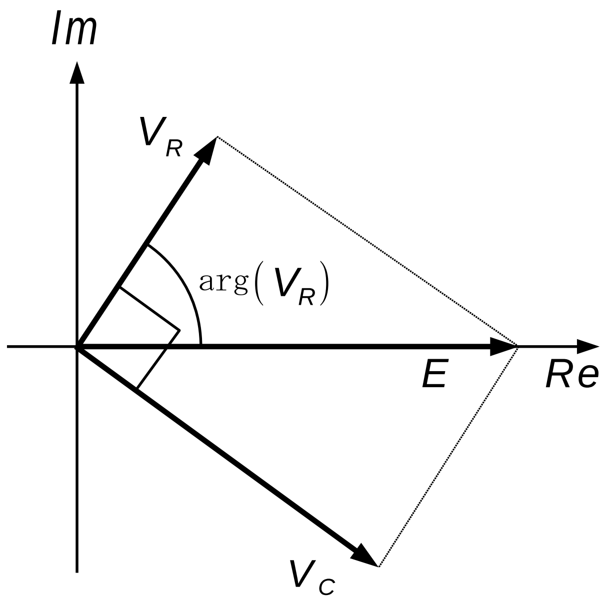
$$|V_R| = \frac{E}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

となり，位相は,

$$\arg(V_R) = \arg\left(1 - i\frac{\omega_0}{\omega}\right) = \tan^{-1}\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_0}$$

となる。

(2) フェーザー図は



となる。

(2) たとえば，V_C を V_R の先端までの平行移動させれば，E，V_C，V_R を平行移動したもので三角形をなすことができる。それぞれの辺の長さが $|E|$，$|V_C|$，$|V_R|$ となるから，三角不等式より，$|E| \leq |V_C| + |V_R|$ となる。

(4) $\omega_0 = \frac{1}{RC} = 10^3 \mathrm{rad/s}$ とおく。

　V_R の振幅図を考える。$\omega \ll \omega_0$ で,

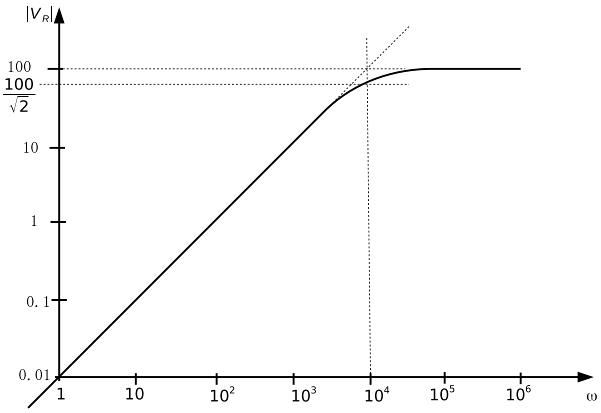
$$|V_R| \simeq E\frac{\omega}{\omega_0}$$

と近似できるので，振幅図では傾き 1 の直線になる。$\omega \gg \omega_0$ では，$|V_R|$ は $|E|$ で一定である。$\omega = \omega_0$ はカットオフ周波数で,

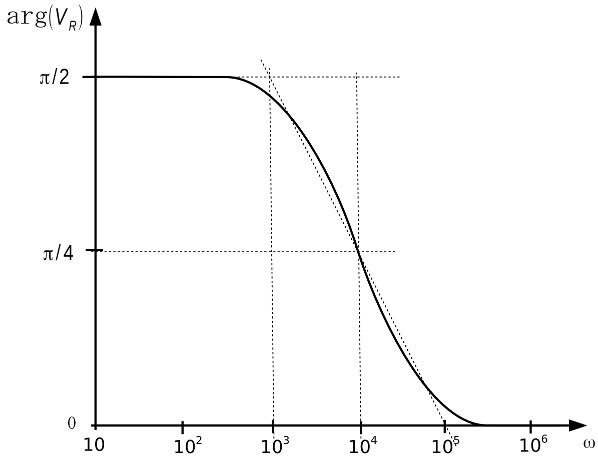
$$|V_R| = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

　V_R の位相図を考える。$\omega \ll \omega_0$ で $\arg(V_R)$ は $\pi/2$ で一定である。$\omega \gg \omega_0$ で $\arg(V_R)$ は 0 で一定である。また，$\omega = 0.1\omega_0$ で $\arg(V_R) \simeq \pi/2 - 0.1$，$\omega = \omega_0$ で $\arg(V_R) = \pi/4$，$\omega = 10\omega_0$ で $\arg(V_R) \simeq 0.1$ となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。



振幅図



位相図

問３.

$t=0$ では,

$$x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0}^{\omega_0}d\omega=\frac{\omega_0}{\pi}$$

となる。$t\neq 0$ では,

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2i\pi t}\left[\mathrm{e}^{i\omega t}\right]_{-\omega_0}^{\omega_0}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{i\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}}{2i\pi t}=\frac{\mathrm{e}^{i\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}}{2i\pi t}=\frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}\end{aligned}$$

となる。この式の $t\to 0$ の極限も $\frac{\omega_0}{\pi}$ となるので,

$$x(t)=\frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}$$

だけでもよい。$x(t)=0$ となるのは, $t\neq 0$ で, $\sin(\omega_0 t)=0$ の場合であるから,

$$t=\frac{\pi n}{\omega_0}\qquad (n=\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots)$$

である。

問４.

(1)

$$F(s)=\frac{2}{s}$$

(2)

$$F(s)=\frac{1}{s+2}$$

(3)

$$F(s)=\frac{s}{s^2+16}$$

(4)

$$F(s)=-\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\frac{3}{s}\right)=\frac{6}{s^3}$$

(5)

$$F(s)=\frac{3e^{-4(s+2)}}{s+2}$$

(6)

$$F(s)=-\frac{d}{ds}\frac{3}{s^2+9}=\frac{6s}{(s^2+9)^2}$$

(7)

$$F(s)=\frac{3}{(s+2)^2+9}=\frac{3}{s^2+4s+13}$$

(8)

$$F(s) = -\frac{d}{ds}\frac{3}{s^2+4s+13} = -\frac{-6(s+2)}{(s^2+4s+13)^2} = \frac{6s+12}{(s^2+4s+13)^2}$$

(9)

まず，部分分数展開を行う。

$$F(s) = \frac{3s^2+11s+7}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{a}{(s+2)^2} + \frac{b}{s+2} + \frac{c}{s+3}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} & \frac{a}{(s+2)^2} + \frac{b}{s+2} + \frac{c}{s+3} \\ = \quad & \frac{a(s+3)+b(s+2)(s+3)+c(s+2)^2}{(s+2)^2(s+3)} \\ = \quad & \frac{(b+c)s^2+(a+5b+4c)s+(3a+6b+4)}{(s+2)^2(s+3)} \end{aligned}$$

となるので，次の連立方程式が成立する。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b+c & = & 3 \\ a+5b+4c & = & 11 \\ 3a+6b+4c & = & 7 \end{array} \right.$$

これを解くと，$a=-3$, $b=2$, $c=1$ となる。従って，

$$F(s) = \frac{-3}{(s+2)^2} + \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

となるので，

$$f(t) = -3te^{-2t} + 2e^{-2t} + e^{-3t}$$

となる。