線形システム論 中間試験

- １問を解答用紙１ページを使って解答して下さい。裏面を使っても良いです。
- 途中の計算も必ず書いてください。
- 配点は予定です。

問１． 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

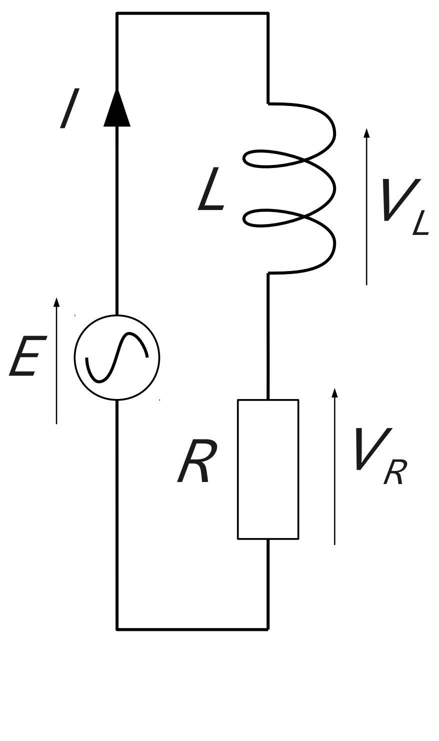
とおく。A の固有値と固有ベクトルを求め，変数 t に対して，

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$$

を求めよ。また，次の方程式をクラメルの公式を使って解け。(10+5 点)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問２． 次の LR 回路において $\arg(E) = 0\mathrm{rad}$ とし，**(1)** E，V_L，V_R をフェーザー図で示せ。**(2)** $|E| \leq |V_L| + |V_R|$ が成立することを，(1) の結果を用いて説明せよ。また，等号の成り立つ条件を求めよ。なお，L，R，ω は 0 以上の有限の値とする。**(3)** $|E| = 1000\mathrm{V}$，$R = 100\Omega$，$L = 0.0001H$ とする。角周波数 ω に対する，抵抗にかかる電圧 V_R のボード線図 (振幅図と位相図) を図示せよ。なお，図内に重要な数値や補助線を書き込むこと。($5+5+5+5 = 20$ 点, (2) の不等号が逆だったため，何か書いてあれば 3 点)



問３． 区間 $[0, 1]$ で定義された次の関数 $x(t)$ を，複素数表示でフーリエ級数展開せよ。(係数を求める式と展開式の両方を示す。) また，展開係数が 0 になる周波数を求めよ。(12 + 3 点)

$$x(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 1/8) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

問４． ラプラス変換に関する次の問いに答えよ。($5 \times 8 + 10 = 50$ 点)

(1) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = u(t) \qquad (\text{単位ステップ関数})$$

(2) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{2t}$$

(3) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \sin 3t$$

(4) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = 3t$$

(5) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 2\pi) \\ \sin 3t & (t \geq 2\pi) \end{cases}$$

(6) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = t \cos 4t$$

(7) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{2t} \cos 4t$$

(8) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{2t} t \cos 4t$$

(9) 次の関数を，部分分数展開を使って逆ラプラス変換しなさい (その導出過程を詳しく書くこと)。

$$F(s) = \frac{3s^2 + 6s + 7}{(s+1)^2(s+3)}$$

解答例

問１.

　固有値は,

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

より,

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 6 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)\lambda - (-3)(-6) = \lambda^2 - 3\lambda - 18 = (\lambda - 6)(\lambda + 3)$$

となり，固有値は 6 と -3 となる。
　固有値 6 に対する固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} 6-3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

より，例えば,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

で与えることができる。固有値 -3 に対する固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} -3-3 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

より，例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えることができる。

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。

$$A = P \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

が成立する。従って,

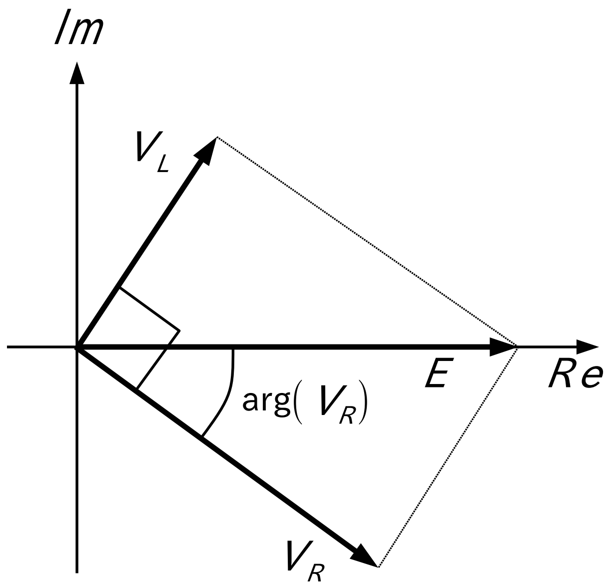
$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[P \begin{pmatrix} 6t & 0 \\ 0 & -3t \end{pmatrix} P^{-1} \right]^n \\
&= P \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (6t)^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-3t)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & -e^{6t} \\ e^{-3t} & 2e^{-3t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{6t} + e^{-3t} & -2e^{6t} + 2e^{-3t} \\ -e^{6t} + e^{-3t} & e^{6t} + 2e^{-3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。クラメルの公式を使えば,

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}2&2&3\\-1&1&3\\1&1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&2&3\\2&1&3\\-1&1&-1\end{vmatrix}}=\frac{-10}{-1}=10,\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}2&2&3\\2&-1&3\\-1&1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&2&3\\2&1&3\\-1&1&-1\end{vmatrix}}=\frac{-3}{-1}=3,\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}2&2&2\\2&1&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&2&3\\2&1&3\\-1&1&-1\end{vmatrix}}=\frac{8}{-1}=-8$$

問２.

(1)



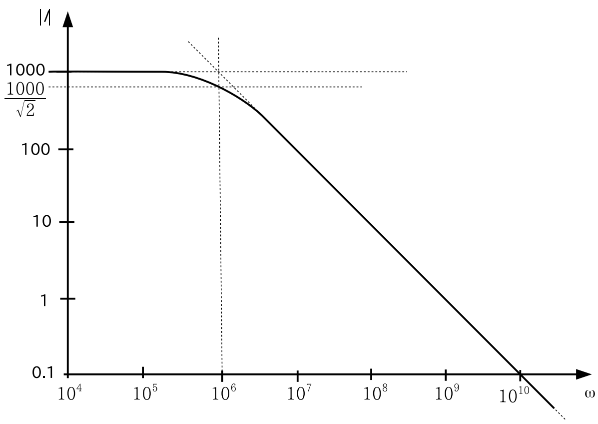
フェーザー図

(2)

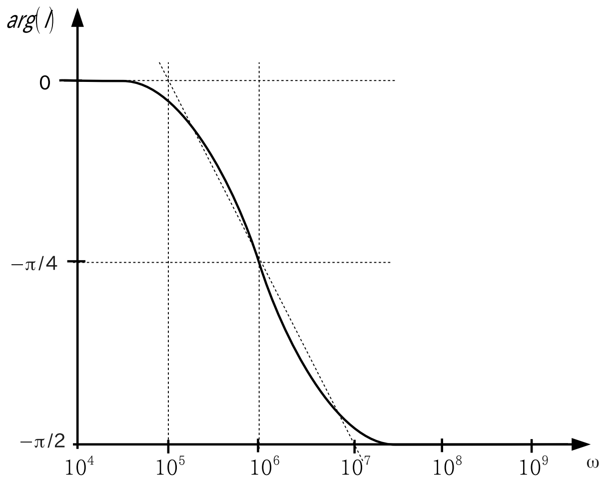
たとえば，V_L を V_R の先端までの平行移動させれば，E，V_R，V_R を平行移動したもので三角形をなすことができる。それぞれの辺の長さが $|E|$，$|V_R|$，$|V_R|$ となるから，三角不等式より，$|E|\leq|V_R|+|V_R|$ となる。

等号が成立する場合は，三角形を形成しない場合であるから，$V_L=0$ または $V_R=0$ であり，$L=0$ または $R=0$ である。

(3)



振幅図



位相図

V_R は,

$$V_R=\frac{RE}{R+i\omega L}$$

となる。$\omega_0=\frac{R}{L}=10^6\mathrm{rad/s}$ とおく。V_R の振幅は,

$$|V_R|=\frac{R|E|}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}=\frac{|E|}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

となる，$\omega \gg \omega_0$ で $|V_R|$ は $|E|$ で一定である。$\omega \ll \omega_0$ では，

$$|V_R| \simeq \frac{\omega}{\omega_0}$$

と近似できるので，振幅図では傾き 1 の直線になる。$\omega = \omega_0$ はカットオフ周波数で，

$$|V_R| = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

位相は，

$$\arg(V_R) = \arg(E) - \arg\left(1 + i\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_0}$$

となる。となる，$\omega \ll \omega_0$ で $\arg(V_R)$ は 0 で一定である。$\omega \gg \omega_0$ で $\arg(V_R)$ は $-\pi/2$ で一定である。また，$\omega = 0.1\omega_0$ で $\arg(V_R) \simeq -0.1$，$\omega = \omega_0$ で $\arg(V_R) = -\pi/4$，$\omega = 10\omega_0$ で $\arg(V_R) \simeq -\pi/2 + 0.1$ となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

問３.

$n = 0$ のときは，

$$c_0 = \int_0^1 g(t)dt = \int_0^{1/8} dt = \frac{1}{8}$$

$n \neq 0$ のときは，

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 g(t)e^{-2\pi int}dt \\ &= \int_0^{1/8} e^{-2\pi int}dt \\ &= \left[\frac{-1}{2\pi in}e^{-2\pi int}\right]_0^{1/8} \\ &= \frac{1}{2\pi in}\left(1 - e^{-2\pi in1/8}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi in}\left(1 - e^{-\pi in/4}\right) \end{aligned}$$

となる。従って次式が成立する。

$$g(t) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi in}\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{n=\infty}\left(1 - e^{-\pi in/4}\right)e^{-2\pi int}$$

展開係数が 0 となるのは，$n \neq 0$ で，$1 - e^{-\pi in/4} = 0$ であるから，0 以外の整数 k に対して，周波数は $n = 8k$ となる場合である。

問４.

(1)

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

(2)

$$F(s) = \frac{1}{s-2}$$

(3)

$$F(s) = \frac{3}{s^2+9}$$

(4)

$$F(s) = \frac{3}{s^2}$$

(5)

$$F(s) = \frac{3e^{-2\pi s}}{s^2+9}$$

(6)

$$F(s) = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+16} = -\frac{s^2+16-s(2s)}{(s^2+16)^2} = \frac{s^2-16}{(s^2+16)^2}$$

(7)

$$F(s) = \frac{s-2}{(s-2)^2+16} = \frac{s-2}{s^2-4s+20}$$

(8)

$$F(s) = -\frac{d}{ds}\frac{s-2}{s^2-4s+20} = -\frac{s^2-4s+20-(s-2)(2s-4)}{(s^2-4s+20)^2} = \frac{s^2-4s-12}{(s^2-4s+20)^2}$$

(9)

まず，部分分数展開を行う。

$$F(s) = \frac{3s^2+6s+7}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{a}{(s+1)^2} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+3}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} & \frac{a}{(s+1)^2} + \frac{b}{(s+1)} + \frac{c}{s+3} \\ = \quad & \frac{a(s+3)+b(s+1)(s+3)+c(s+1)^2}{(s+1)^2(s+3)} \\ = \quad & \frac{(b+c)s^2+(a+4b+2c)s+(3a+3b+c)}{(s+2)(s+4)^2} \end{aligned}$$

となるので，次の連立方程式が成立する。

$$\begin{cases} b+c &= 3 \\ a+4b+2c &= 6 \\ 3a+3b+c &= 7 \end{cases}$$

これを解くと，$a=2,\ b=-1,\ c=4$ となる。従って，

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s+3}$$

となるので，

$$f(t) = 2te^{-t} - e^{-t} + 4e^{-3t}$$

となる。