線形システム論 中間試験

- １問を解答用紙１ページを使って解答して下さい。裏面を使っても良いです。
- 途中の計算も必ず書いてください。
- 配点は予定です。

問１． 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -24 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$$

とおく。A の固有値と固有ベクトルを求め，変数 t に対して，

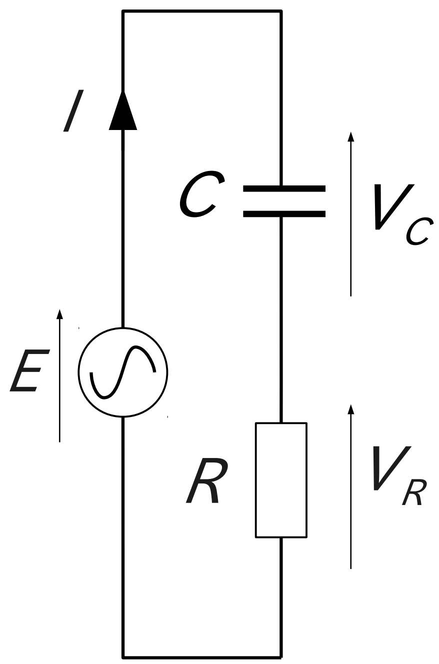
$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$$

を求めよ。また，次の方程式をクラメルの公式を使って求めよ。(10+5 点)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問２． 次の CR 回路において，$|E| = 10\mathrm{V}$，$\arg(E) = 0\mathrm{rad}$，$R = 1k\Omega$，$L = 10\mu F$ とする。

角周波数 ω に対する，抵抗およびコンデンサの電圧 V_R と V_C のボード線図 (振幅図と位相図) を図示せよ。なお，図内に重要な数値や補助線を書き込むこと。$(5+5+5+5=20$ 点)



問３． 区間 $[-1, 1]$ で定義された次の関数 $g(t)$ を，複素数表示でフーリエ級数展開しなさい。(係数を求める式と展開式の両方を示す。なるべく簡単にすること。)(15 点)

$$g(t) = \begin{cases} t+1 & (-1 \le t \le 0) \\ -t+1 & (\text{else}) \end{cases}$$

問４． ラプラス変換に関する次の問いに答えよ。$(5 \times 8 + 10 = 50$ 点)

(1) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = u(t) \qquad (\text{単位ステップ関数})$$

(2) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-3t}$$

(3) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \cos 4t$$

(4) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = 2t$$

(5) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < \pi) \\ \sin 2t & (t \ge \pi) \end{cases}$$

(6) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = t \sin 2t$$

(7) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-3t} \sin 2t$$

(8) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-3t} t \sin 2t$$

(9) 次の関数を，部分分数展開を使って逆ラプラス変換しなさい (その導出過程を詳しく書くこと)。

$$F(s) = \frac{-3s^2 - 12s - 8}{(s+2)^2(s+4)}$$

解答例

問１.

固有値は,

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

より,

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda - 9 & 24 \\ -4 & \lambda + 11 \end{vmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda + 11) - (-4)24 = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1)$$

となり，固有値は -3 と 1 となる。

固有値 -3 に対する固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} -3-9 & 24 \\ -4 & -3+11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 24 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

より，例えば,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えることができる。固有値 1 に対する固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} 1-9 & 24 \\ -4 & 1+11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 24 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

より，例えば,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えることができる。

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

となる。

$$A = P \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

が成立する。従って,

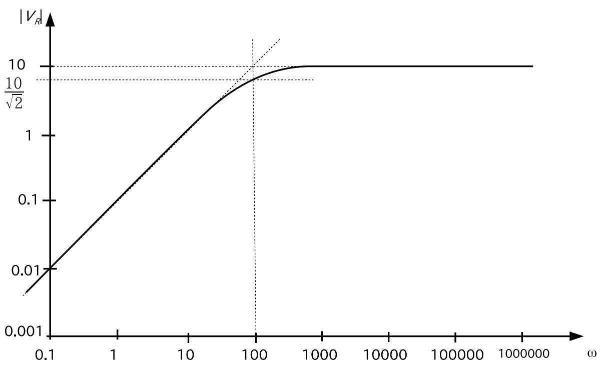
$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[P \begin{pmatrix} -3t & 0 \\ 0 & 1t \end{pmatrix} P^{-1} \right]^n \\
&= P \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-3t)^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-3t} & 3e^{-3t} \\ e^t & -2e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-3t} + 3e^t & 6e^{-3t} - 6e^t \\ -e^{-3t} + e^t & 3e^{-3t} - 2e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。クラメルの公式を使えば,

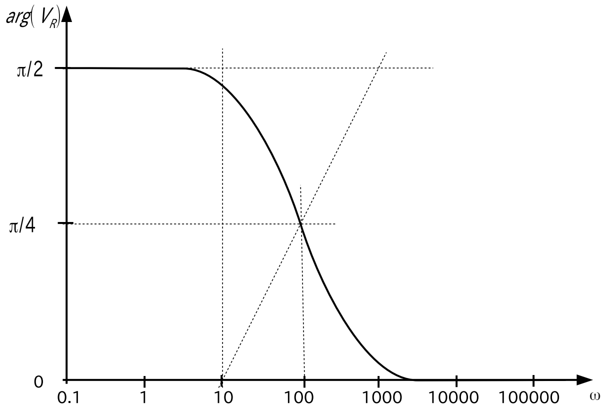
$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&1&1\\1&2&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&-1&2\\2&1&1\\3&2&2\end{vmatrix}}=\frac{9}{3}=3,\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}3&1&2\\2&2&1\\3&1&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&-1&2\\2&1&1\\3&2&2\end{vmatrix}}=\frac{0}{3}=0,\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}3&-1&1\\2&1&2\\3&2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&-1&2\\2&1&1\\3&2&2\end{vmatrix}}=\frac{-12}{3}=-4$$

問２.

(1)



振幅図



位相図

V_R は,

$$V_R=\frac{RE}{R+\frac{1}{i\omega C}}=\frac{E}{1-i\frac{1}{\omega CR}}$$

となる。$\omega_0=\frac{1}{CR}=100\text{rad/s}$ とおく。電流の振幅は,

$$|V_R|=\frac{|E|}{\sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

となる，$\omega\gg\omega_0$ で $|V_R|$ は $|E|$ で一定である。$\omega\ll\omega_0$ では,

$$|V_R|\simeq\frac{\omega}{\omega_0}$$

と近似できるので，振幅図では傾き 1 の直線になる。$\omega=\omega_0$ はカットオフ周波数で,

$$|V_R|=\frac{E}{\sqrt{2}}$$

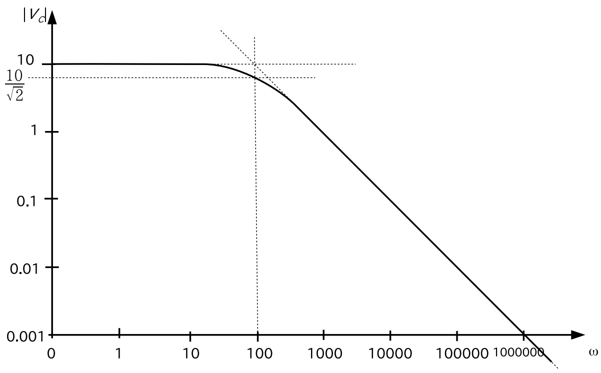
となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

位相は,

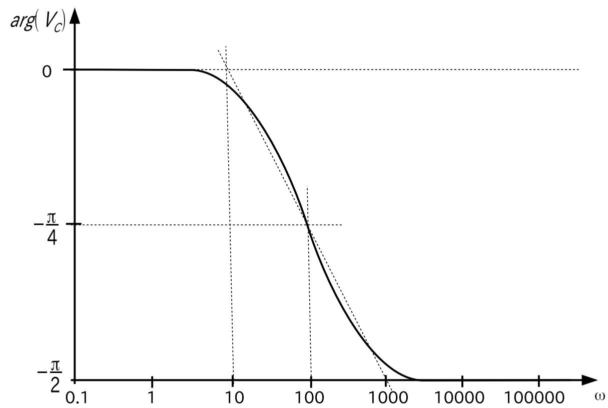
$$\arg(V_R)=\arg(E)-\arg\left(1-i\frac{\omega_0}{\omega}\right)=\tan^{-1}\frac{\omega_0}{\omega}$$

となる。となる，$\omega\ll\omega_0$ で $\arg(V_R)$ は $\pi/2$ で一定である。$\omega\gg\omega_0$ で $\arg(V_R)$ は 0 で一定である。また，$\omega=0.1\omega_0$ で $\arg(V_R)\simeq\pi/2-0.1$，$\omega=\omega_0$ で $\arg(V_R)=\pi/4$，$\omega=10\omega_0$ で $\arg(V_R)\simeq 0.1$ となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

(2)



振幅図



位相図

　V_C は,

$$V_C = \frac{\frac{1}{i\omega C}E}{R+\frac{1}{i\omega C}}\frac{1}{1+i\frac{\omega}{\omega_0}}$$

V_C の振幅は,

$$|V_c| = \frac{|E|}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

となる，$\omega \ll \omega_0$ では，$|V_C|$ は $|E|$ で一定である。$\omega \gg \omega_0$ で

$$|V_C| \simeq \frac{\omega_0}{\omega}$$

と近似できるので，振幅図では傾き -1 の直線になる。$\omega = \omega_0$ はカットオフ周波数で,

$$|V_L| = \frac{|E|}{\sqrt{2}}$$

となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

　位相は,

$$\arg(V_C) = \arg(E) + \arg\left(\frac{1}{1+\frac{i\omega}{\omega_0}}\right) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_0}$$

となる。となる，$\omega \ll \omega_0$ で $\arg(V_C)$ は 0 で一定である。$\omega \gg \omega_0$ で $\arg(V_C)$ は $-\pi/2$ で一定である。また，$\omega = 0.1\omega_0$ で $\arg(V_C) \simeq 0.1$，$\omega = \omega_0$ で $\arg(V_C) = -\pi/4$，$\omega = 10\omega_0$ で $\arg(V_C) \simeq -\pi/2 + 0.1$ となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

問３.

　$n = 0$ のときは,

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(t)dt = \frac{1}{2}$$

　$n \neq 0$ のときは,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(t)e^{-\frac{2\pi i n}{2}}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(t+1)e^{-\pi i n t}dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-t)e^{-\pi i n t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-t)e^{-\pi i n(-t)}dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-t)e^{-\pi i n t}dt = \int_{0}^{1}(1-t)\cos(\pi n t)dt \\
&= \int_{0}^{1}(1-t)\frac{1}{\pi n}\frac{d}{dt}\sin(\pi n t)dt = \left[(1-t)\frac{1}{\pi n}\sin(\pi n t)\right]_0^1 - \int_{0}^{1}(-1)\frac{1}{\pi n}\sin(\pi n t)dt \\
&= \frac{1}{\pi^2 n^2}\left[-\cos(\pi n t)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 & (n = 2k) \\ \frac{2}{\pi^2(2k+1)^2} & (n = 2k+1) \end{cases}
\end{aligned}$$

となる。従って次式が成立する。

$$g(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{2}{\pi^2(2k+1)^2}e^{\pi i(2k+1)t}$$

問４．

(1)

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

(2)

$$F(s) = \frac{1}{s+3}$$

(3)

$$F(s) = \frac{s}{s^2+16}$$

(4)

$$F(s) = \frac{2}{s^2}$$

(5)

$$F(s) = \frac{2e^{-\pi s}}{s^2+4}$$

(6)

$$F(s) = -\frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+4} = -\frac{2(-1)(2s)}{(s^2+4)^2} = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

(7)

$$F(s) = \frac{2}{(s+3)^2+4} = \frac{2}{s^2+6s+13}$$

(8)

$$F(s) = -\frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+6s+13} = -\frac{2(-1)(2s+6)}{(s^2+6s+13)^2} = \frac{4s+12}{(s^2+6s+13)^2}$$

(9)

まず，部分分数展開を用いる。

$$F(s) = \frac{-3s^2-12s-8}{(s+2)(s+4)^2} = \frac{a}{(s+2)^2} + \frac{b}{(s+2)} + \frac{c}{s+4}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} & \frac{a}{(s+2)^2} + \frac{b}{(s+2)} + \frac{c}{s+4} \\ = & \frac{a(s+4)+b(s+2)(s+4)+c(s+2)^2}{(s+2)^2(s+4)} \\ = & \frac{(b+c)s^2+(a+6b+6c)s+(4a+8b+4c)}{(s+2)(s+4)^2} \end{aligned}$$

となるので，次の連立方程式が成立する。

$$\begin{cases} b+c &= -3 \\ a+6b+4c &= -12 \\ 4a+8b+4c &= -8 \end{cases}$$

これを解くと，$a=2, b=-1, c=-2$ となる。従って，

$$F(s) = \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{-1}{s+2} + \frac{-2}{s+4}$$

となるので，

$$f(t) = 2te^{-2t} - e^{-2t} - 2e^{-4t}$$

となる。

(解答不要) 留数定理で解く。$F(s)$ には，$s=-2$ に位数 2 の極，$s=-4$ に位数 1 の極が存在する。従って，

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{s\to-2}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}(s+2)^2F(s)e^{st} + \lim_{s\to-4}(s+4)F(s)e^{st} \\ &= \lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left(-3s+\frac{-8}{s+4}\right)e^{st} + \lim_{s\to-4}\left(-4+\frac{3}{(s+2)^2}\right)e^{st} \\ &= \lim_{s\to-2}\left\{\left(-3s+\frac{-8}{s+4}\right)te^{st} + \left(-3+\frac{8}{(s+4)^2}\right)e^{st}\right\} + \left(-3+\frac{4}{(-4+2)^2}\right)e^{-4t} \\ &= \left(6+\frac{-8}{-2+4}\right)te^{-2t} + \left(-3+\frac{8}{(-2+4)^2}\right)te^{-2t} - 2e^{-4t} \\ &= 2te^{-2t} - e^{-2t} - 2e^{-4t} \end{aligned}$$