線形システム論 中間試験

- １問を解答用紙１ページを使って回答して下さい。途中の計算も必ず書いてください。
- 配点は予定です。

問１． 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 9 \\ -30 & 16 \end{pmatrix}$$

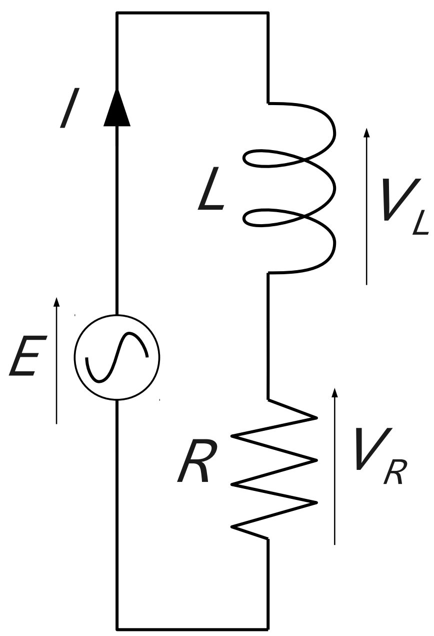
とおく。A の固有値と固有ベクトルを求め，変数 t に対して，

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$$

を求めよ。また，次の行列 B のランクを理由と共に示せ。(10+5 点)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

問２． 次の LR 回路において，$E = 100\mathrm{V}$，$R = 100\Omega$，$L = 100mH$ とする。角周波数 ω に対する，電流 I およびコイルの電圧 V_L に対するボード線図 (振幅図と位相図) を図示せよ。なお，図内に重要な数値や補助線を書き込むこと。$(5+5+5+5=20$ 点)



問３． 次の区間 $[-1,1]$ で定義された関数を，複素数表示でフーリエ級数展開しなさい。(係数を求める式と展開式の両方を示す。なるべく簡単にすること。)(15 点)

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

問４． ラプラス変換に関する次の問いに答えよ。$(5\times 8 + 10 = 50$ 点)

(1) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = u(t) \qquad (\text{単位ステップ関数})$$

(2) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-2t}$$

(3) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \sin 3t$$

(4) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = t$$

(5) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 1) \\ t-1 & (t \ge 1) \end{cases}$$

(6) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = t\cos 3t$$

(7) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-2t}\cos 3t$$

(8) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-2t} t\cos 3t$$

(9) 次の関数を，部分分数展開を使って逆ラプラス変換しなさい (その導出過程を詳しく書くこと)。

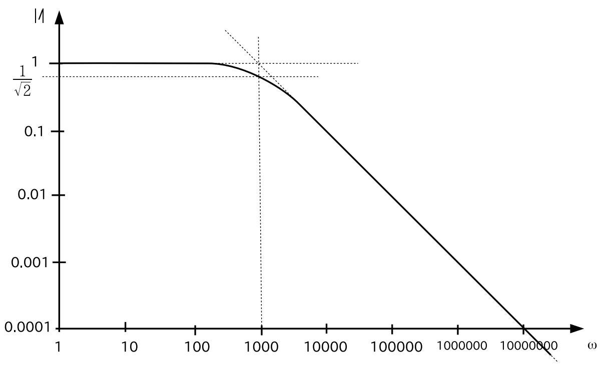
$$F(s) = \frac{s^2+5s+8}{(s+2)^2(s+3)}$$

解答例

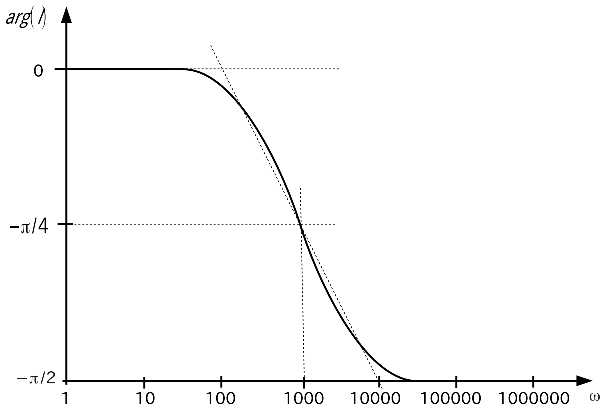
問１.

　固有値は,
$$\det(\lambda I - A) = 0$$
より,
$$0 = \begin{vmatrix} \lambda+17 & -9 \\ 30 & \lambda-16 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-1)$$
となり，固有値は 1 と -2 となる。
　固有値 -2 に対する固有ベクトルは,
$$\begin{pmatrix} -2+17 & -9 \\ 30 & -2-16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -9 \\ 30 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$
より，例えば,
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$
で与えることができる。固有値 -1 に対する固有ベクトルは,
$$\begin{pmatrix} 1+17 & -9 \\ 30 & 1-16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ 30 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$
より，例えば,
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
で与えることができる。
$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$
とおけば,
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$
となる。
$$A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$
が成立する。従って,
$$\begin{aligned}
e^A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[P \begin{pmatrix} -2t & 0 \\ 0 & 1t \end{pmatrix} P^{-1} \right]^n \\
&= P \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-2t)^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 6e^{-2t} - 5e^t & -3e^{-2t} + 3e^t \\ 10e^{-2t} - 10e^t & -5e^{-2t} + 6e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$
となる。また，$|B| = 0$ であるが，2,3 行目と 1,2 列目を取り出した行列の行列式の値は,
$$B = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$
となるので $\mathrm{rank}(B) = 2$ である。

問２.
(1)



振幅図



位相図

　電流は,

$$I = \frac{E}{R + i\omega L} = \frac{\frac{E}{R}}{1 + i\frac{\omega}{\frac{R}{L}}}$$

となる。$\omega_0 = \frac{R}{L} = 1,000\mathrm{rad/s}$ とおく。電流の振幅は,

$$|I| = \frac{\frac{|E|}{R}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

となる，$\omega \ll \omega_0$ で $|I|$ は 1 で一定である。$\omega \gg \omega_0$ では,

$$|I| \simeq \frac{\omega_0}{\omega}$$

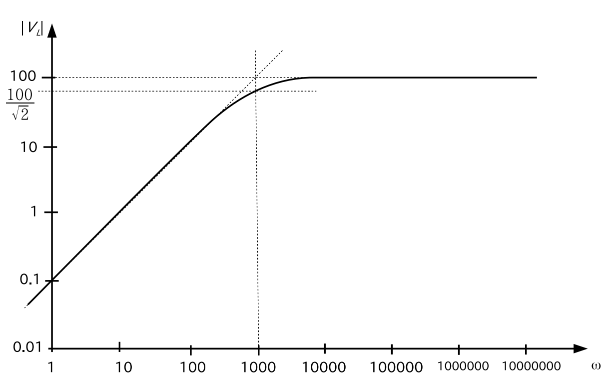
と近似できるので，振幅図では傾き -1 の直線になる。$\omega = \omega_0$ はカットオフ周波数で,

$$|I| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

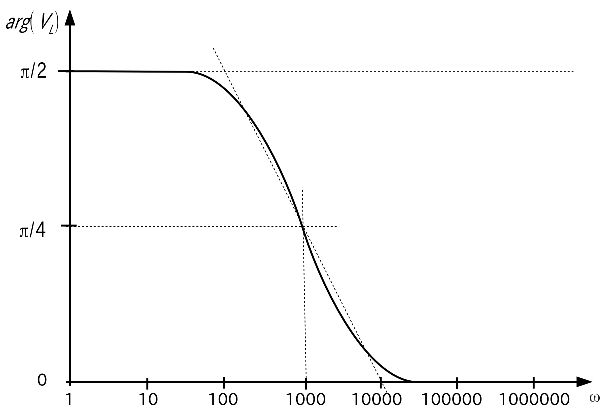
となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。
　位相は,

$$\arg(I) = \arg(E) - \arg\left(1 + i\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_0}$$

となる。となる，$\omega \ll \omega_0$ で $\arg(I)$ は 0 で一定である。$\omega \gg \omega_0$ で $\arg(I)$ は $-\pi/2$ で一定である。また，$\omega = 0.1\omega_0$ で $\arg(I) \simeq -0.1$，$\omega = \omega_0$ で $\arg(I) = -\pi/4$，$\omega = 10\omega_0$ で $\arg(I) \simeq -\pi/2 + 0.1$ となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。
(2)



振幅図



位相図

　V_L は,

$$V_L = \frac{i\omega LE}{R+i\omega L} = \frac{E}{1-i\frac{\frac{R}{L}}{\omega}} = \frac{E}{1-i\frac{\omega_0}{\omega}}$$

V_L の振幅は,

$$|V_L| = \frac{|E|}{\sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} = \frac{100}{\sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

となる，$\omega \ll \omega_0$ では,

$$|V_L| \simeq \frac{\omega}{\omega_0}$$

と近似できるので，振幅図では傾き 1 の直線になる。$\omega \gg \omega_0 10$ で $|V_L|$ は 100 で一定である。$\omega = \omega_0$ はカットオフ周波数で,

$$|V_L| = \frac{100}{\sqrt{2}}$$

となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

　位相は,

$$\arg(I) = \arg(E) + \arg\left(1+i\frac{\omega_0}{\omega}\right) = \tan^{-1}\frac{\omega_0}{\omega}$$

となる。となる，$\omega \ll \omega_0$ で $\arg(I)$ は $\pi/2$ で一定である。$\omega \gg \omega_0$ で $\arg(I)$ は 0 で一定である。また，$\omega = 0.1\omega_0$ で $\arg(I) \simeq \pi/2 - 0.1$，$\omega = \omega_0$ で $\arg(I) = \pi/4$，$\omega = 10\omega_0$ で $\arg(I) \simeq 0.1$ となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

問３.

　$n = 0$ では,

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1dt = \frac{1}{2}$$

　$n \neq 0$ では,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(t)e^{-\frac{2\pi in}{2}}dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-\pi int}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi in}e^{-\pi in}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2\pi in}\left(e^{-i\frac{\pi in}{2}} - e^{i\frac{\pi in}{2}}\right) = \frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0 & (n=2k) \\ \frac{(-1)^k}{\pi(2k+1)} & (n=2k+1) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。従って次式が成立する。

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(2k+1)} e^{-\pi i(2k+1)t}$$

問４.

(1)

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

(2)

$$F(s) = \frac{1}{s+2}$$

(3)

$$F(s) = \frac{3}{s^2+9}$$

(4)

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

(5)

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}$$

(6)

$$F(s) = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+9} = -\frac{s^2+9-2s\cdot s}{(s^2+9)^2} = \frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$$

(7)

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9} = \frac{s+2}{s^2+4s+13}$$

(8)

$$F(s) = \frac{(s+2)^2 - 9}{((s+2)^2+9)^2} = \frac{s^2+4s-5}{(s^2+4s+13)^2}$$

(9)

まず，部分分数展開を用いる。

$$F(s) = \frac{s^2+5s+8}{(s+2)(s+3)^2} = \frac{a}{(s+2)} + \frac{b}{(s+3)^2} + \frac{c}{s+3}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{(s+2)^2} + \frac{b}{(s+2)} + \frac{c}{s+3} \\
= \quad & \frac{a(s+3)+b(s+3)(s+2)+c(s+2)^2}{(s+2)^2(s+3)} \\
= \quad & \frac{(b+c)s^2+(a+5b+4c)s+(3a+6b+4c)}{(s+2)(s+3)^2}
\end{aligned}$$

となるので，次の連立方程式が成立する。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b+c & = & 1 \\ a+5b+4c & = & 5 \\ 3a+6b+4c & = & 8 \end{array} \right.$$

これを解くと，$a=2, b=-1, c=2$ となる。従って，

$$F(s) = \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

となるので，

$$f(t) = 2te^{-2t} - e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

となる。

(解答不要) 留数定理で解く。$F(s)$ には，$s=-2$ に位数 2 の極，$s=-3$ に位数 3 の極が存在する。従って，

$$\begin{aligned}
f(t) \quad &= \quad \lim_{s\to-2} \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}(s+2)^2F(s)e^{st} + \lim_{s\to-3}(s+3)F(s)e^{st} \\
&= \quad \lim_{s\to-2} \frac{d}{ds}\left(s+2+\frac{2}{s+3}\right)e^{st} + \frac{(-3)^2+5(-3)+8}{(-3+2)^2}e^{-3t} \\
&= \quad \lim_{s\to-2} \left\{\left(1-\frac{2}{(s+3)^2}\right)te^{st} + \left(s+2+\frac{2}{s+3}\right)te^{st}\right\} + 2e^{-3t} \\
&= \quad \left(1-\frac{2}{(-2+3)^2}\right)te^{-2t} + \left(-2+2+\frac{2}{-2+3}\right)te^{-2t} + 2e^{-3t} \\
&= \quad 2te^{-2t} - e^{-2t} + 2e^{-3t}
\end{aligned}$$