線形システム論 中間試験

- １問を解答用紙１ページを使って回答して下さい。途中の計算も必ず書いてください。
- 配点は予定です。

問１． 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{pmatrix}$$

とおく。A の固有値と固有ベクトルを求め，

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

を求めよ。(15 点)

問２． 次の関数の ω に対する，ボード線図 (振幅図と位相図) を図示せよ。なお，図内に重要な数値や補助線を書き込むこと。($10+10=20$ 点)

(1)

$$F_1(\omega) = \frac{100}{i\omega + 10}$$

(2)

$$F_2(\omega) = \frac{100000}{(i\omega + 10)(i\omega + 10000)}$$

問３． 次の関数をフーリエ変換しなさい。(15 点)

$$g(t) = \begin{cases} \sin t & (-\pi \leq t \leq \pi) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

問４． ラプラス変換に関する次の問いに答えよ。($5 \times 7 + 5 + 10 = 50$ 点)

(1) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = u(t) \qquad (\text{単位ステップ関数})$$

(2) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-3t}$$

(3) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \cos 2t$$

(4) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = t$$

(5) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = t \sin 2t$$

(6) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-3t} \sin 2t$$

(7) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-3t} t \sin 2t$$

(8) 次の関数を，部分分数展開および留数定理を使って逆ラプラス変換しなさい (特に留数定理を使う計算は，その導出過程を詳しく書くこと)。

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - 2s - 5}{(s+2)^3(s+1)}$$

解答例

問１.

固有値は,

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

より,

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 6 \\ -45 & \lambda + 16 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

となり，固有値は 2 と -1 となる。

固有値 2 に対する固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} (17-2) & -6 \\ 45 & (-16-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ 45 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

より，例えば,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

で与えることができる。固有値 -1 に対する固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} (17+1) & -6 \\ 45 & (-16+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ 45 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

より，例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

で与えることができる。

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

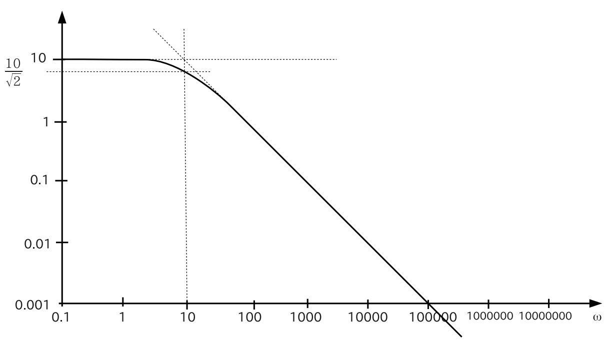
が成立する。従って,

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \right]^n \\ &= P \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 6e^2 - 5e^{-1} & -2e^2 + 2e^{-1} \\ 15e^2 - 15e^{-1} & -5e^2 + 6e^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

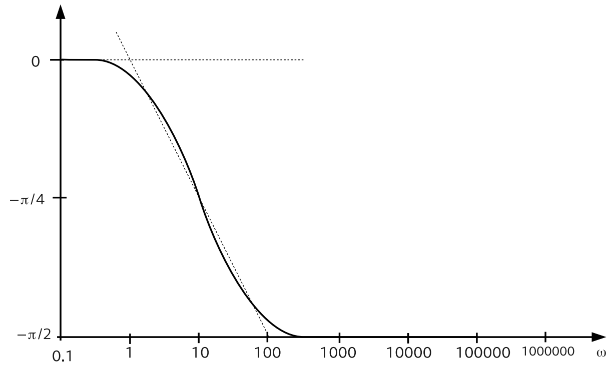
となる。

問２.

(1)



振幅図



位相図

振幅は,

$$|F_1(\omega)| = \frac{100}{\sqrt{\omega^2 + 10^2}}$$

となる，$\omega \ll 10$ で $|F_1(\omega)|$ は 10 で一定である。$\omega \gg 10$ では振幅は,

$$|F_1(\omega)| \simeq \frac{100}{\omega}$$

と近似できるので，振幅図では傾き -1 の直線になる。$\omega = 10$ はカットオフ周波数で,

$$|F_1(\omega)| = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

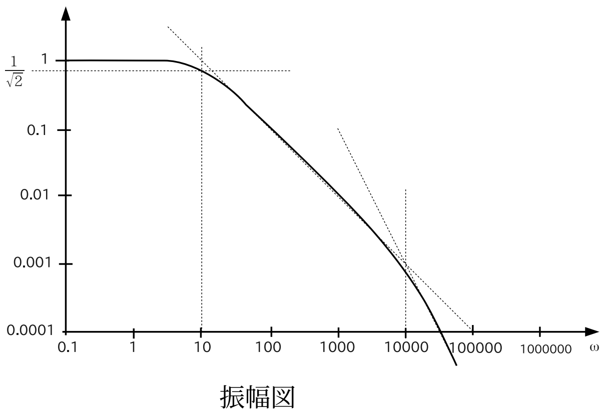
となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

位相は,

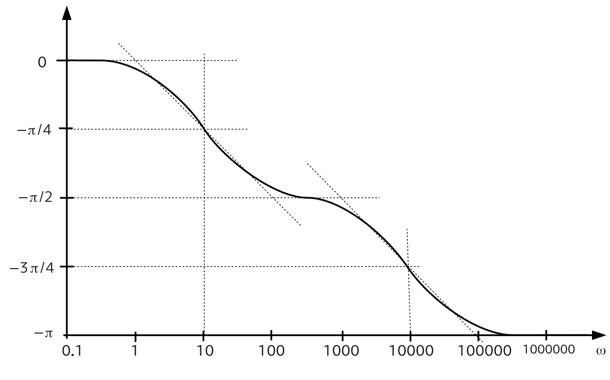
$$\arg(F_1(\omega)) = -\arg(i\omega + 10) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{10}$$

となる。となる，$\omega \ll 10$ で $\arg(F_1(\omega))$ は 0 で一定である。$\omega \gg 10$ で $\arg(F_1(\omega))$ は $-\pi/2$ で一定である。また，$\arg(F_1(1)) \simeq 0.1$，$\arg(F_1(10)) = -\pi/4$，$\arg(F_1(100)) \simeq -\pi/2 + 0.1$ となる。これらの部分を滑らかにつなげばよい。

(2)



振幅図



位相図

振幅は,

$$|F_1(\omega)| = \frac{100000}{\sqrt{(\omega^2 + 10^2)(\omega^2 + 10000^2)}}$$

となる，$\omega \ll 10$ で $|F_1(\omega)|$ は 1 で一定である。$10 \ll \omega \ll 10000$ では振幅は,

$$|F_1(\omega)| \simeq \frac{10}{\omega}$$

と近似できるので，振幅図では傾き -1 の直線になる。$\omega \gg 10000$ では振幅は,

$$|F_1(\omega)| \simeq \frac{100000}{\omega^2}$$

と近似できるので，振幅図では傾き -2 の直線になる。また，$\omega = 10$ はカットオフ周波数で，

$$|F_1(10)| \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。$\omega = 10000$ も 2 つ目の因子のカットオフ周波数で，

$$|F_1(10000)| \simeq \frac{1}{1000\sqrt{2}}$$

となる。この場合，カットオフ周波数での振幅は，相互の影響のため近似値となるが，周波数が 1000 倍離れているため，ほぼそれぞれの値に等しい。

位相は，

$$\arg(F_1(\omega)) = -\arg((i\omega+10)(i\omega+10000)) = -\arg(i\omega+10) - \arg(i\omega+10000) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{10} - \tan^{-1}\frac{\omega}{10000}$$

となる。(1) のグラフと (1) のグラフのカットオフ周波数を $\omega = 10000$ にずらしたものを加えて位相図を書くことができる。この場合も，カットオフ周波数での位相は近似値となる。

問３.

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{it} - e^{-it})e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-i(\omega-1)t} - e^{-i(\omega+1)t})dt \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{-i(\omega-1)}e^{-i(\omega-1)t} - \frac{1}{-i(\omega+1)}e^{-i(\omega+1)t}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{-i(\omega-1)}\frac{e^{-i(\omega-1)\pi} - e^{i(\omega-1)\pi}}{2i} - \frac{1}{-i(\omega+1)}\frac{e^{-i(\omega+1)\pi} - e^{i(\omega+1)\pi}}{2i} \\
&= \frac{\sin\{-(\omega-1)\pi\}}{-i(\omega-1)} - \frac{\sin\{-(\omega+1)\pi\}}{-i(\omega+1)} = -i\frac{\sin\{(\omega-1)\pi\}}{\omega-1} + i\frac{\sin\{(\omega+1)\pi\}}{\omega+1}
\end{aligned}$$

で計算できる。

問４.

(1)

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

(2)

$$F(s) = \frac{1}{s+3}$$

(3)

$$F(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

(4)

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

(5)

$$F(s) = -\frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+4} = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

(6)

$$F(s) = \frac{2}{(s+3)^2+4} = \frac{2}{s^2+6s+13}$$

(7)

$$F(s) = \frac{4(s+2)}{((s+2)^2+4)^2} = \frac{4s+12}{(s^2+6s+13)^2}$$

(8)

まず，部分分数展開を用いる。

$$F(s) = \frac{s^3+2s^2-2s-5}{(s+2)^3(s+1)} = \frac{a}{(s+2)^3} + \frac{b}{(s+2)^2} + \frac{c}{s+2} + \frac{d}{s+1}$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
& \frac{a}{(s+2)^3}+\frac{b}{(s+2)^2}+\frac{c}{s+2}+\frac{d}{s+1} \\
= & \frac{a(s+1)+b(x+1)(s+2)+c(s+1)(s+2)^2+d(s+2)^3}{(s+2)^3(s+1)} \\
= & \frac{(c+d)s^3+(b+5c+6d)s^2+(a+3b+8c+12d)s+(a+2b+6c+8d)}{(s+2)^3(s+1)}
\end{aligned}
$$

となるので，次の連立方程式が成立する。

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
c+d & = & 1 \\
b+5c+6d & = & 2 \\
a+3b+8c+12d & = & -2 \\
a+2b+6c+8d & = & -5
\end{array}
\right.
$$

これを解くと，$a=1,\ b=-1,\ c=3,\ d=-2$ となる。従って，

$$
F(s)=\frac{1}{(s+2)^3}-\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{3}{s+2}-\frac{2}{s+1}
$$

となるので，

$$
f(t)=\frac{1}{2}t^2e^{-2t}-te^{-2t}+3e^{-2t}-2e^{-t}
$$

となる。

留数定理で解く。$F(s)$ には，$s=-2$ に 3 位の極，$s=-1$ に 1 位の極が存在する。従って，

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{s\to-2}\frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{ds^2}(s+2)^3F(s)e^{st}+\lim_{s\to-1}(s+1)F(s)e^{st} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to-2}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s^3+2s^2-2s-5}{s+1}\right)e^{st}+\lim_{s\to-1}\frac{s^3+2s^2-2s-5}{(s+2)^2}e^{st} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to-2}\frac{d^2}{ds^2}\left(s^2+s-3+\frac{-2}{s+1}\right)e^{st}+\frac{(-1)^3+2(-1)^2-2(-1)-5}{(-1+2)^2}e^{-t} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left\{\left(s^2+s-3+\frac{-2}{s+1}\right)te^{st}+\left(2s+1+\frac{2}{(s+1)^2}\right)e^{st}\right\}-2e^{-t} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to-2}\left\{\left(s^2+s-3+\frac{-2}{s+1}\right)t^2e^{st}+2\left(2s+1+\frac{2}{(s+1)^2}\right)te^{st}+\left(2+\frac{2(-2)}{(s+1)^3}\right)e^{st}\right\}-2e^{-t} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left((-2)^2+(-2)-3+\frac{-2}{(-2)+1}\right)t^2e^{-2t}+2\left(2(-2)+1+\frac{2}{(-2+1)^2}\right)te^{-2t}+\left(2+\frac{2(-2)}{(-2+1)^3}\right)e^{-2t}\right\}-2e^{-t} \\
&= \frac{1}{2}t^2e^{-2t}-te^{-2t}+3e^{-2t}-2e^{-t}
\end{aligned}
$$