# 線形システム論 中間試験

１問を解答用紙１ページを使って回答して下さい。途中の計算も必ず書いてください。

**問１．** 次の線形方程式の解をクラメルの公式を使って求めよ。(15 点)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**問２．** 行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

とおく。$A$ の固有値と固有ベクトルを求め,

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

を求めよ。(20 点)

**問３．** 次の 0 から $2\pi$ までの関数を 複素数表示 で，フーリエ級数展開しなさい。(0 になる項は和に含まれないようにすること) (15 点)

$$g(t) = \begin{cases} t & (0 \le t < \pi) \\ 2\pi - t & (\pi \le t \le 2\pi) \end{cases}$$

**問４．** ラプラス変換に関する次の問いに答えよ。($5 \times 6 + 10 + 10 = 50$ 点)

(1) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^t$$

(2) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \sin 2t$$

(3) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \cos 3t$$

(4) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = 4t$$

(5) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = t \cos 3t$$

(6) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-3t} \sin 2t$$

(7) 次の関数を，部分分数展開および留数定理を使って逆ラプラス変換しなさい (特に留数定理を使う計算は，その導出過程を詳しく書くこと)。

$$F(s) = \frac{-s^2 - 5s + 20}{(s^2 + 4)(s + 3)^2}$$

線形システム論 中間試験

１問を解答用紙１ページを使って回答して下さい。途中の計算も必ず書いてください。

**問１．** 次の線形方程式の解をクラメルの公式を使って求めよ。(15 点)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**問２．** 行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

とおく。$A$ の固有値と固有ベクトルを求め,

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

を求めよ。(20 点)

**問３．** 次の 0 から $2\pi$ までの関数を 複素数表示 で，フーリエ級数展開しなさい。(0 になる項は和に含まれないようにすること) (15 点)

$$g(t) = \begin{cases} t & (0 \le t < \pi) \\ 2\pi - t & (\pi \le t \le 2\pi) \end{cases}$$

**問４．** ラプラス変換に関する次の問いに答えよ。($5 \times 6 + 10 + 10 = 50$ 点)

(1) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^t$$

(2) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \sin 2t$$

(3) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \cos 3t$$

(4) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = 4t$$

(5) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = t \cos 3t$$

(6) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-3t} \sin 2t$$

(7) 次の関数を，部分分数展開および留数定理を使って逆ラプラス変換しなさい (特に留数定理を使う計算は，その導出過程を詳しく書くこと)。

$$F(s) = \frac{-s^2 - 5s + 20}{(s^2 + 4)(s + 3)^2}$$

## 解答例

問１．(15 点)

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}
$$
$$
= \; 1\cdot(-1)\cdot(-1)+1\cdot1\cdot1+2\cdot2\cdot1-1\cdot1\cdot1-1\cdot2\cdot(-1)-2\cdot(-1)\cdot1=9
$$

となるから,

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{9}(4\cdot(-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot1\cdot1+(-1)\cdot2\cdot1-4\cdot1\cdot1-(-2)\cdot2\cdot(-1)-(-1)\cdot(-1)\cdot1=-1 \\
y &= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{9}(1\cdot(-2)\cdot(-1)+1\cdot(-1)\cdot1+2\cdot4\cdot1-1\cdot(-1)\cdot1-1\cdot4\cdot(-1)-2\cdot(-2)\cdot1=2 \\
z &= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{9}(1\cdot(-1)\cdot(-1)+1\cdot1\cdot4+2\cdot2\cdot(-2)-1\cdot1\cdot(-2)-1\cdot2\cdot(-1)-2\cdot(-1)\cdot4=1
\end{aligned}
$$

となる。

問２．(15 点)

固有値は,

$$
\det(A-\lambda I)=0
$$

より,

$$
0=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-6=(\lambda+3)(\lambda-2)
$$

より，固有値は 2 と $-3$ となる。

固有値 2 に対する固有ベクトルは,

$$
\begin{pmatrix} (1-2) & 2 \\ 2 & (-2-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0
$$

より，例えば,

$$
\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

で与えることができる。固有値 $-3$ に対する固有ベクトルは,

$$
\begin{pmatrix} (1+3) & 2 \\ 2 & (-2+3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0
$$

より，例えば,

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}
$$

で与えることができる。

$$
P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}
$$

とおけば,

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

となる。

$$A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

が成立する。従って,

$$\begin{aligned}
e^A &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1}\right]^n \\
&= P\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}2^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-3)^n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-3} \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4e^2+e^{-3} & 2e^2-2e^{-3} \\ 2e^2-2e^{-3} & e^2+4e^{-3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

問３.
まず,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-\frac{2\pi i}{2\pi}nt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} te^{-int}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} te^{-int}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{0} te^{int}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt
\end{aligned}$$

となる。従って，$n \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\left(\frac{1}{n}\sin(nt)\right)'dt \\
&= \frac{1}{\pi n}\left[t\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi n^2}\left[\cos(nt)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]_0^{\pi}
\end{aligned}$$

となる。$n = 0$ のとき,

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} tdt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

となる。従って，フーリエ級数展開は,

$$g(t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)^2}e^{(2k+1)it}$$

となる。複素数表示でないため以下は解答ではないが，cos 関数を使えば，sin 項が消えるので次式になる。

$$g(t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)t)$$

問４．

(1)

$$F(s)=\frac{1}{s-1}$$

(2)

$$F(s)=\frac{4}{s^2+2}$$

(3)

$$F(s)=\frac{s}{s^2+9}$$

(4)

$$F(s)=\frac{4}{s^2}$$

(5)

$$F(s)=-\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+9}=\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$$

(6)

$$F(s)=\left.\frac{2}{t^2+4}\right|_{t=s+3}=\frac{2}{(s+3)^2+4}$$

(7)

まず，部分分数展開を用いる。

$$F(s)=\frac{-s^2-5s+20}{(s^2+4)(s+3)^2}=\frac{as+b}{s^2+4}+\frac{c}{s+3}+\frac{d}{(s+3)^2}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
&\frac{as+b}{s^2+4}+\frac{c}{s+3}+\frac{d}{(s+3)^2}\\
=\;&\frac{(as+b)(s+3)^2+c(s+3)(s^2+4)+d(s^2+4)}{(s^2+4)(s+3)^2}\\
=\;&\frac{1}{(s^2+4)(s+3)^2}\{(a+c)s^3+(6a+b+3c+d)s^2+(9a+6b+4c)s+(9b+12c+4d)\}
\end{aligned}$$

となるので，次の連立方程式が成立する。

$$\begin{cases}
a+c = 0\\
6a+b+3c+d = -1\\
9a+6b+4c = -5\\
9b+12c+4d = 20
\end{cases}$$

これを解くと，$a=-1,\ b=0,\ c=1,\ d=2$ となる。従って，

$$F(s)=-\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s+3}+\frac{2}{(s+3)^2}$$

となるので，

$$f(t)=-\cos 2t+e^{-3t}+2te^{-3t}$$

となる。

留数定理で解く。$F(s)$ には，$s=\pm 2i$ に 1 位の極，$s=-3$ に 2 位の極，が存在する。従って，

$$\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{s\to 2i}(s-2i)F(s)e^{st}+\lim_{s\to -2i}(s+2i)F(s)e^{st}+\lim_{s\to -3}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}(s+3)^2F(s)e^{st}\\
&= +\lim_{s\to 2i}\frac{-s^2-5s+20}{(s+2i)(s+3)^2}e^{st}+\lim_{s\to -2i}\frac{-s^2-5s+20}{(s-2i)(s+3)^2}e^{st}+\lim_{s\to -3}\frac{d}{ds}\frac{-s^2-5s+20}{s^2+4}e^{st}\\
&= \frac{-(2i)^2-5(2i)+20}{4i(2i+3)^2}e^{2it}+\frac{-(-2i)^2-5(-2i)+20}{(-4i)(-2i+3)^2}e^{-2it}\\
&\quad +\lim_{s\to -3}\frac{(-2s-5)(s^2+4)e^{st}+(-s^2-5s+20)(s^2+4)te^{st}-(-s^2-5s+20)(2s)e^{st}}{(s^2+4)^2}\\
&= \frac{(24-10i)(3-2i)^2e^{2it}-(24+10i)(3+2i)^2e^{-2it}}{(4+9)^2(4i)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{(9+4)^2}\{(6-5)(9+4)e^{-3t}+(-9+15+20)(9+4)te^{-3t}-(-9+15+20)(-6)e^{-3t}\} \\
= & \frac{\{(120-120)-(288-50)i\}e^{3it}-\{(120-120)+(288-50)i\}e^{-3it}}{13^2(4i)} \\
& +\frac{1}{13^2}\{13-(-6)26e^{-2t}+26\cdot 13te^{-2t}\} \\
= & -2i\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{4i}+e^{-3t}+2te^{-3t} \\
= & -\cos 2t+e^{-3t}+2te^{-3t}
\end{aligned}
$$