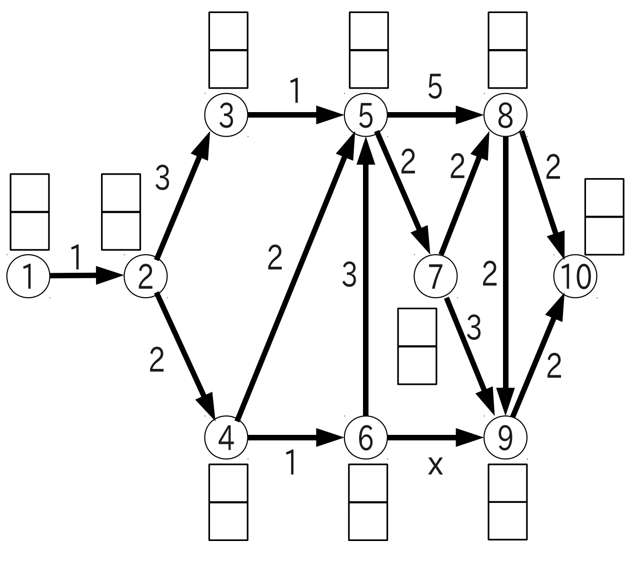
線形システム論 中間試験

問1． システム工学に関する次の文章の空欄 (a) 〜 (j) を埋めよ。

- システム分析は企画段階の作業で，システムの (a) を明らかにし，複数のシステム案を作成・評価し，システムの概要を決定する。
- システム計画では，システムの概要決定後から完成までの (b) (計画ではない) を行う。
- システム製造では，システムで使用する (c) などのハードウエアや (d) などのソフトウエアの作成を行う。
- システムサービスでは， (e) 的にシステムがその目的を達成できるように維持管理を行う。
- 快適さ，安全性，柔軟性などを貨幣価値に換算したものを (f) と呼ぶ。
- N 個の部品があり，i 番目の部品の信頼度 (単位時間内に故障しない確率) を r_i とするとき，並列結合したシステムの信頼度は (g) であり，直列結合したシステムの信頼度は (h) である。 (i) とは，部品などを余分に用意しておき，故障したときに切り替えて (j) (アルファベット 4 文字，わからなければ意味でも可) を短くするものである。

問2． $x = 3$ のとき，最早期結合点時刻，最遅結合点時刻，クリティカルパス (それに含まれる工程に少しでも遅延が生じると，全体に遅延が生じる工程からなるパス) を記せ (図を解答用紙に写し記す)。また，上で求めたクリティカルパスがクリティカルパスとなる x の範囲を求めよ。



問3． 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -45 \\ 6 & -16 \end{pmatrix}$$

とおく。A の固有値と固有ベクトルを求め，

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

を求めよ。

問4． ラプラス変換に関する次の問いに答えよ。

(1) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-t}$$

(2) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \sin 3t$$

(3) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = \cos 2t$$

(4) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = t$$

(5) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = t \sin 3t$$

(6) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-t} \sin 3t$$

(7) 次の関数を，部分分数展開および留数定理を使って逆ラプラス変換しなさい (特に留数定理を使う計算は，その導出過程を詳しく書くこと)。(

$$F(s) = \frac{3s^3 + s^2 + 3s + 39}{(s+2)^2(s^2+9)}$$

を出すつもりが去年の

$$F(s) = \frac{5s^2 + 5s - 4}{(s+3)^2(s^2+4)}$$

ままでした。この解答は去年の中間を見てください。)

解答例

問１．((a)~(j)：各２点，合計 20 点)

(1)

(a) 目的

(b) 評価

(c) 機器

(d) マニュアル

(e) 持続

(f) 便益

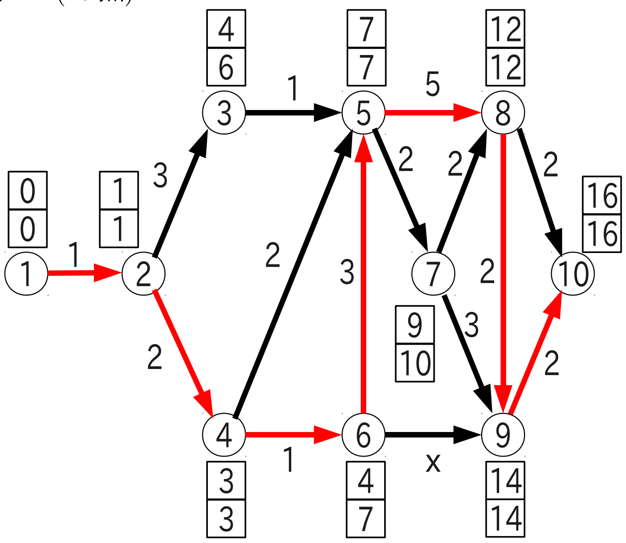
(g) $1-\Pi_{i=1}^{N}(1-r_i)$

(h) $\Pi_{i=1}^{N}r_i$

(i) 待機システム (Stand by system)

(j) MTTR (故障を修理するための平均時間)

問２．(15 点)



x が 10 より小さい間は大きくしてもクリティカルパスは変わらない。逆に，$x=10$ とすると，$6\to 9$ のパスがクリティカルパスに加わり，$x>10$ とすると，$1\to 2\to 4\to 6\to 9\to 10$ がクリティカルパスになる。従って，答えは $x\le 10$ である ($x<10$ でも正解とする)。

問３．(15 点)

固有値は，

$$\det(A-\lambda I)=0$$

より，

$$\begin{pmatrix} \lambda-17 & 45 \\ -6 & \lambda+16 \end{pmatrix}=0$$

となり，

$$\lambda^2-\lambda-2=0$$

が成立する。従って，固有値は 2 と 1 となる。

固有値 2 に対する固有ベクトルは，

$$\begin{pmatrix} (2-17) & 45 \\ -6 & (2+16) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$$

より，

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。固有値 -1 に対する固有ベクトルは，

$$\begin{pmatrix} (-1-17) & 45 \\ -6 & (-1+16) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$$

より，

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となる。従って，

$$P=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$A=P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

が成立する。

$$\begin{aligned}
e^A &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}\right]^n \\
&= P\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}2^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-1)^n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 6e^2-5e^{-1} & -15e^2+15e^{-1} \\ 2e^2-2e^{-1} & -5e^2+6e^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

問４．((1)~(6)：各５点，(7)：部分分数展開：10 点，留数：10 点，合計 50 点)

(1)

$$F(s)=\frac{1}{s+1}$$

(2)

$$F(s)=\frac{3}{s^2+9}$$

(3)

$$F(s)=\frac{s}{s^2+4}$$

(4)

$$F(s)=\frac{1}{s^2}$$

(5)

$$F(s)=\frac{6s}{(s^2+9)^2}$$

(6)

$$F(s)=\frac{3}{(s+1)^2+9}$$

(7)

まず，部分分数展開を用いる。

$$F(s) = \frac{3s^3+s^2+3s+39}{(s+2)^2(s^2+9)} = \frac{a}{s+2} + \frac{b}{(s+2)^2} + \frac{c+ds}{s^2+9}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{s+2} + \frac{b}{(s+2)^2} + \frac{c+ds}{s^2+9} \\
= \quad & \frac{a(s+2)(s^2+9)+b(s^2+9)+(c+ds)(s+2)^2}{(s+2)^2(s^2+9)} \\
= \quad & \frac{1}{(s+2)^2(s^2+9)}\{(a+d)s^3+(2a+b+c+4d)s^2+(9a+4c+4d)s+(16a+9b+4c)\}
\end{aligned}$$

となるので，次の連立方程式が成立する。

$$\begin{cases}
a+d &= 3 \\
2a+b+c+4d &= 1 \\
9a+4c+4d &= 3 \\
18a+9b+4c &= 39
\end{cases}$$

これを解くと，$a=3,\ b=1,\ c=-6,\ d=0$ となる。従って，

$$F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} - 2\frac{3}{s^2+9}$$

となるので (2013/11/5 小森君指摘により修正)，

$$f(t) = 3e^{-2t} + te^{-2t} - 2\sin 3t$$

となる。

留数定理で解く。$F(s)$ には，$s=-2$ に 2 位の極，$s=\pm 3i$ に 1 位の極が存在する。従って，

$$\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{s\to -2}\frac{1}{(1-1)!}\frac{d}{ds}(s+2)^2F(s)e^{st} + \lim_{s\to 3i}(s-3i)F(s)e^{st} + \lim_{s\to -3i}(s+3i)F(s)e^{st} \\
&= \lim_{s\to -2}\frac{d}{ds}\frac{3s^3+s^2+3s+39}{s^2+9}e^{st} + \lim_{s\to 3i}\frac{3s^3+s^2+3s+39}{(s+2)^2(s+3i)}e^{st} + \lim_{s\to -3i}\frac{3s^3+s^2+3s+39}{(s+2)^2(s-3i)}e^{st} \\
&= \lim_{s\to -2}\frac{(9s^2+2s+3)(s^2+9)e^{st}+(3s^3+s^2+3s+39)(s^2+9)te^{st}-(3s^3+s^2+3s+39)(2s)e^{st}}{(s^2+9)^2} \\
&\quad + \frac{3(3i)^3+(3i)^2+3(3i)+39}{(3i+2)^2(6i)}e^{2it} + \frac{3(-3i)^3+(-3i)^2+3(-3i)+39}{(-3i+2)^2(-6i)}e^{-2it} \\
&= \frac{1}{(4+9)^2}\{(36-4+3)(4+9)e^{-2t}+(-24+4-6+39)(4+9)te^{-2t}-(-24+4-6+39)(-4)e^{-2t}\} \\
&\quad + \frac{(2-3i)^2(30-72i)e^{3it}-(2+3i)^2(30+72i)e^{-3it}}{(9+4)^2(6i)} \\
&= \frac{1}{13^2}\{13(35+4)e^{-2t}+13^2te^{-2t}\} + \frac{(-5-12i)(5-12i)e^{3it}-(-5+12i)(5+12i)e^{-3it}}{13^2 i} \\
&= 3e^{-2t}+te^{-2t}-2\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i} \\
&= 3e^{-2t}+te^{-2t}-2\sin 3t
\end{aligned}$$