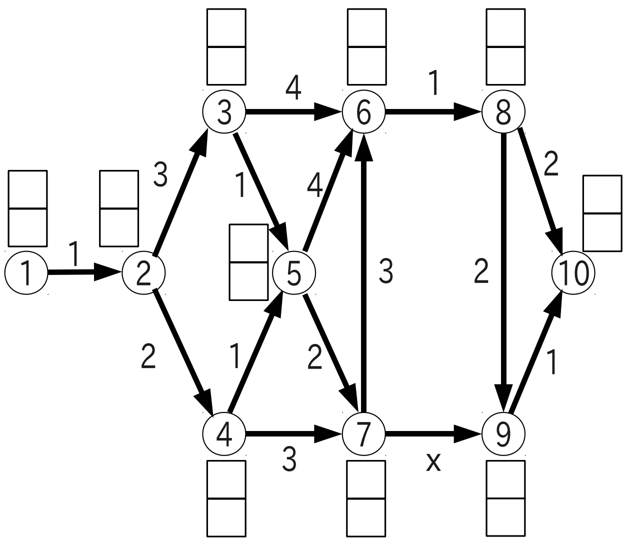
線形システム論 中間試験

問１． システム工学に関する次の文章の空欄 $\boxed{\text{(a)}}$ 〜 $\boxed{\text{(j)}}$ を埋めよ。

- システム分析は企画段階の作業で，システムの目的を明らかにし，$\boxed{\text{(a)}}$ のシステム案を作成・評価し，システムの概要を決定する。
- システム $\boxed{\text{(b)}}$ では，システムの概要決定後から完成までの評価を行う。
- システム製造では，システムで使用する機器などの $\boxed{\text{(c)}}$ やマニュアルなどの $\boxed{\text{(d)}}$ の作成を行う。
- システムサービスでは，持続的にシステムがその $\boxed{\text{(e)}}$ を達成できるように維持管理を行う。
- 信頼性に関して，利用率を MTBF と MTTR を使って表すと $\boxed{\text{(f)}}$ となる。
- システムの故障の期間を時間順に 3 つに大別すると，$\boxed{\text{(g)}}$，$\boxed{\text{(h)}}$，$\boxed{\text{(i)}}$ があり，$\boxed{\text{(g)}}$ における故障は主に，$\boxed{\text{(j)}}$ などによって生じる。

問２． $x = 3$ のとき，最早期結合点時刻，最遅結合点時刻，クリティカルパス (それに含まれる工程に少しでも遅延が生じると，全体に遅延が生じる工程からなるパス) を記せ (図を解答用紙に写し記す)。また，上で求めたクリティカルパスがクリティカルパスとなる x の範囲を求めよ。



問３． 次の行列式を定義式を使って求めよ。

$$
\begin{vmatrix}
a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & a_{1\,4} \\
a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & a_{2\,4} \\
a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & a_{3\,4} \\
a_{4\,1} & a_{4\,2} & a_{4\,3} & a_{4\,4}
\end{vmatrix}
= \sum_{k=1}^{24} \mathrm{sign}(\sigma_k) a_{1\,\sigma_k(1)} a_{2\,\sigma_k(2)} a_{3\,\sigma_k(3)} a_{4\,\sigma_k(4)}
$$

ここで，置換 σ_i を次で与え，解答に記す項の順番は，σ_i の順番で記述すること。

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1 = (1), \\
&\sigma_2 = (1\,2),\ \sigma_3 = (1\,3),\ \sigma_4 = (1\,4), \\
&\sigma_5 = (2\,3),\ \sigma_6 = (2\,4),\ \sigma_7 = (3\,4), \\
&\sigma_8 = (1\,2)(1\,3),\ \sigma_9 = (1\,3)(1\,2), \\
&\sigma_{10} = (1\,2)(1\,4),\ \sigma_{11} = (1\,4)(1\,2), \\
&\sigma_{12} = (1\,3)(1\,4),\ \sigma_{13} = (1\,4)(1\,3), \\
&\sigma_{14} = (2\,3)(2\,4),\ \sigma_{15} = (2\,4)(2\,3), \\
&\sigma_{16} = (1\,2)(3\,4),\ \sigma_{17} = (1\,3)(2\,4),\ \sigma_{18} = (1\,4)(2\,3), \\
&\sigma_{19} = (1\,2)(1\,3)(1\,4),\ \sigma_{20} = (1\,2)(1\,4)(1\,3), \\
&\sigma_{21} = (1\,3)(1\,2)(1\,4),\ \sigma_{22} = (1\,3)(1\,4)(1\,2), \\
&\sigma_{23} = (1\,4)(1\,3)(1\,2),\ \sigma_{43} = (1\,4)(1\,2)(1\,3)
\end{aligned}
$$

($\sigma_1(i) = i$ となるものを，(1) で表している。また，左からの作用を考えているので，右にあるものから先に作用される。例えば，$\sigma = (1\,2)(1\,3)$ は，$\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2$ となる。)

問３． ラプラス変換に関する次の問いに答えよ。

(1) 次の関数をラプラス変換しなさい。

$$f(t) = e^{-t} \sin 3t$$

(2) 次の関数を，部分分数展開および留数定理を使って逆ラプラス変換しなさい (特に留数定理を使う計算は，その導出過程を詳しく書くこと)。

$$F(s) = \frac{5s^2 + 5s - 4}{(s+3)^2(s^2+4)}$$

解答例

問１．((a)~(j)：各 2 点，計 20 点)

(1)

(a) 複数

(b) 計画

(c) ハードウエア

(d) ソフトウエア

(e) 目的

(f) $\frac{MTBF}{MTBF+MTTR}$

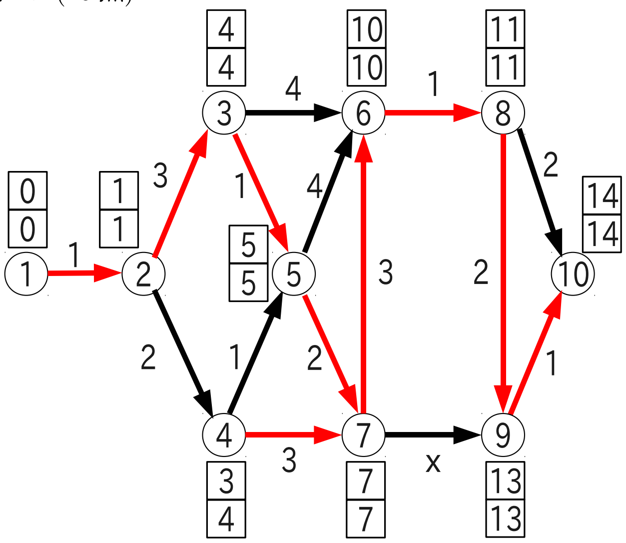
(g) 初期故障期間

(h) 偶発故障期間

(i) 摩耗故障期間

(j) 設計や製造の不良

問２．(20 点)



x が 6 より小さい間は大きくしてもクリティカルパスは変わらない。逆に，$x = 6$ とすると，$7 \to 9$ のパスがクリティカルパスに加わり，$x > 6$ とすると，$1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 7 \to 9 \to 10$ がクリティカルパスになる。従って，答えは $x \le 6$ である ($x < 6$ でも正解とする)。

問３．(15 点)

定義どおり計算すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
& a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \\
& -a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \\
& -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \\
& +a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\
& +a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\
& +a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \\
& +a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} \\
& +a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \\
& -a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} \\
& -a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} \\
& -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}
\end{aligned}
$$

問４．(計 45 点)

(1) (15 点)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin 3t] &= \frac{3}{s^2+9} \\
\mathcal{L}[e^{-t}f(t)] &= F(s+1)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\mathcal{L}[e^{-t}\sin 3t] = \frac{3}{(s+1)^2+9} = \frac{3}{s^2+2s+10}
$$

となる (2 番目，3 番目のどちらの形でも正解)。

(2) (部分分数展開：15 点，留数：15 点)

まず，部分分数展開を用いる。

$$
F(s) = \frac{5s^2+5s-4}{(s+3)^2(s^2+4)} = \frac{a}{(s+3)^2} + \frac{b}{s+3} + \frac{cs+d}{s^2+4}
$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
& \frac{a}{(s+3)^2} + \frac{b}{s+3} + \frac{cs+d}{s^2+4} \\
= \; & \frac{a(s^2+4) + b(s+3)(s^2+4) + (cs+d)(s+3)^2}{(s+3)^2(s^2+4)} \\
= \; & \frac{1}{(s+3)^2(s^2+4)}\{(b+c)s^3 + (a+3b+6c+d)s^2 \\
& +(4b+9c+6d)s + (4a+12b+9d)\}
\end{aligned}
$$

となるので，次の連立方程式が成立する。

$$
\left\{
\begin{aligned}
b+c &= 0 \\
a+3b+6c+d &= 5 \\
4b+9c+6d &= 5 \\
4a+12b+9d &= -4
\end{aligned}
\right.
$$

これを解くと，$a = 2$，$b = -1$，$c = 1$，$d = 0$ となる。従って，

$$
F(s) = \frac{2}{(s+3)^2} + \frac{-1}{s+3} + \frac{s}{s^2+4}
$$

となるので，

$$
f(t) = 2te^{-3t} - e^{-3t} + \cos 2t
$$

となる。

(次ページに続く)

留数定理で解く。$F(s)$ には，$s=-3$ に 2 位の極，$s=\pm 2i$ に 1 位の極が存在する。従って，

$$\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{s\to -3}\frac{1}{(1-1)!}\frac{d}{ds}(s+3)^2F(s)e^{st}+\lim_{s\to 2i}(s-2i)F(s)e^{st}+\lim_{s\to -2i}(s+2i)F(s)e^{st}\\
&= \lim_{s\to -3}\frac{d}{ds}\frac{5s^2+5s-4}{s^2+4}e^{st}+\lim_{s\to 2i}\frac{5s^2+5s-4}{(s+3)^2(s+2i)}e^{st}+\lim_{s\to -2i}\frac{5s^2+5s-4}{(s+3)^2(s-2i)}e^{st}\\
&= \lim_{s\to -3}\frac{(s^2+4)(10s+5)e^{st}+(s^2+4)(5s^2+5s-4)te^{st}-2s(5s^2+5s-4)e^{st}}{(s^2+4)^2}\\
&\quad +\frac{5(2i)^2+5(2i)s-4}{(2i+3)^2(4i)}e^{2it}+\frac{5(-2i)^2+5(-2i)s-4}{(-2i+3)^2(-4i)}e^{-2it}\\
&= \frac{1}{(9+4)^2}\{(9+4)(-15+5)e^{-3t}\\
&\quad +(9+4)(45-15-4)te^{-3t}-(-6)(45-15-4)e^{-3t}\}\\
&\quad +\frac{(-24+10i)(-2i+3)^2e^{2it}-(-24-10i)(2i+3)^2e^{-2it}}{(4+9)^2(4i)}\\
&= \frac{1}{13^2}\{13(-25+12)e^{-3t}+2\cdot 13^2te^{-3t}\}+\frac{(-12+5i)(5-12i)e^{2it}-(-12-5i)(5+12i)e^{-2it}}{13^2(2i)}\\
&= -e^{-3t}+2te^{-3t}+\frac{i((-12)^2+5^2)e^{2it}-(-i)((-12)^2+5^2)e^{-2it}}{13^2(2i)}\\
&= -e^{-3t}+2te^{-3t}+\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\\
&= -e^{-3t}+2te^{-3t}+\cos 2t
\end{aligned}$$