通信とネットワークの演習 (第１４回目)

学科・類：　　　　　学籍番号：　　　　　　名前：

授業中に配布した用紙でない場合は,「コピー」と右上に大きく書くこと。
用紙が足りないときは，裏面を使ってよい。

１．次の語句を簡単に説明しなさい.

1. エントロピー (式を使って説明，情報理論のエントロピー)
エントロピーは，情報源が発するシンボル１つの平均的な情報量 (シンボルを知ることによって解消される不確実さ) である。情報源 $\mathcal{S}$ のシンボル s_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ の出現確率を p_i とすれば，s_i の情報量が $-\log_r p_i$ となり，エントロピー $H(\mathcal{S})$ は次に示すその平均値となる。
$$H(\mathcal{S}) = -\sum_{i=1}^{q} p_i \log p_i$$

2. 条件付きエントロピー (式を使って説明)
2 つの情報源 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ があるときに，$\mathcal{B}$ に対する $\mathcal{A}$ の条件付きエントロピー $H(\mathcal{A}\,|\,\mathcal{B})$ は，$\mathcal{B}$ のシンボルを知ったときに残っている $\mathcal{A}$ のシンボルの平均的な情報量を表す。$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ のシンボルを，それぞれ，a_i，b_j で表すとき，$H(\mathcal{A}\,|\,\mathcal{B})$ は，次式で定義される。
$$H(\mathcal{A}\,|\,\mathcal{B}) = -\sum_j P(b_j) \sum_i P(a_i\,|\,b_j) \log P(a_i\,|\,b_j)$$

3. 相互情報量 (式を使って説明)
2 つの情報源 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ があるときに，相互情報量 $I(A, B)$ は，$\mathcal{B}$ のシンボルを知ることによって減少する $\mathcal{A}$ のシンボルの平均的な不確実さである。または，$\mathcal{B}$ のシンボルが持つ $\mathcal{A}$ のシンボルに関する平均的な情報量であり，次式で定義される。
$$I(A, B) = H(\mathcal{A}) - H(\mathcal{A}\,|\,\mathcal{B})$$

4. 通信容量 (式を使って説明)
通信容量は，通信路において入力側シンボルの出現確率を変化させたときの相互情報量の最大値である。入力を工夫することによって，通信路を使って送ることができる情報量の最大値となる。
$$C = \max_{p_1, p_2, \ldots, p_r} I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max_{p_1, p_2, \ldots, p_r} \left[-\sum_{i=1}^{r} p_i \log p_i - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} p_i P_{ij} \log \left(\frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^{r} p_k P_{kj}} \right) \right]$$

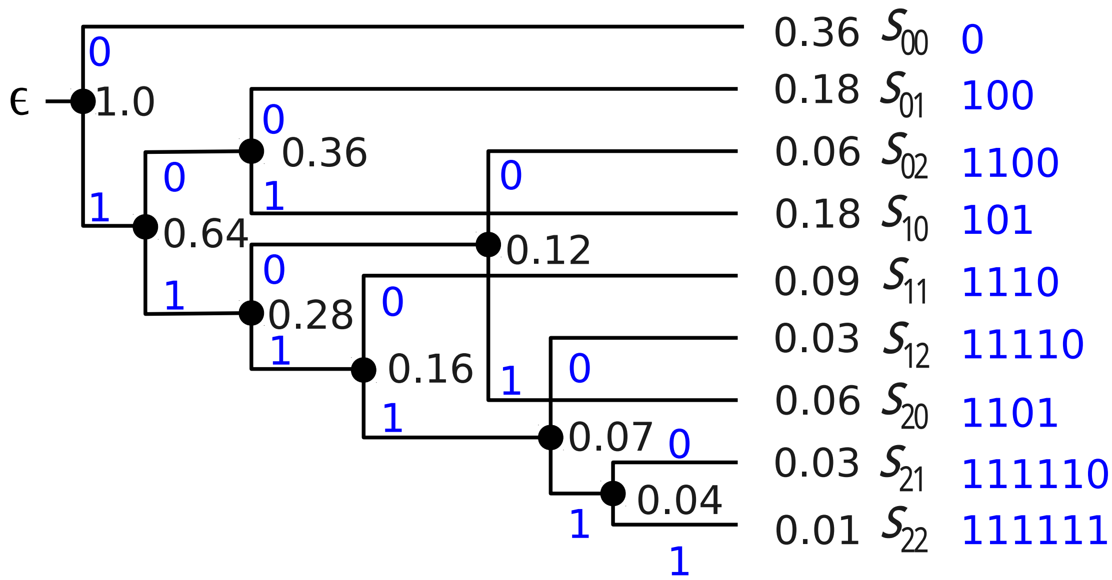
5. 伝送速度 (式を使って説明)
通信路符号化において，r 種類のシンボル n 個を使って，M 種類のシンボルを送るとき，伝送速度 R は $R = \log_r M/n$ で定義される。

6. 情報源符号化定理
情報源 $\mathcal{S}$ を符号化するとき，いくらでも平均符号長が $\mathcal{S}$ のエントロピーに近くなる一意復号可能な符号が存在する。

7. 通信路符号化定理
伝送路において，伝送速度が通信容量より小さければ，誤復号率がいくらでも小さくなる符号が存在する。

２．3 のシンボル s_0, s_1, s_2 に対する，出現確率が $p_0 = 0.7$, $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.1$ とする。拡大情報源 $\mathcal{S}^2$ (s_i と s_j を組み合わせたシンボルを s_{ij} で表す) に対するハフマン符号を求め，平均符号長を求めよ。

拡大情報源のシンボル s_{ij} の出現確率 p_{ij} は，$p_{00} = 0.49$，$p_{01} = 0.14$，$p_{02} = 0.07$，$p_{10} = 0.14$，$p_{11} = 0.04$，$p_{12} = 0.02$，$p_{20} = 0.07$，$p_{21} = 0.02$，$p_{22} = 0.01$ となるので，ハフマン符号は下図より，$s_{00} \mapsto 0$, $s_{01} \mapsto 100$, $s_{02} \mapsto 1100$, $s_{10} \mapsto 101$, $s_{11} \mapsto 1110$, $s_{12} \mapsto 11110$, $s_{20} \mapsto 1101$, $s_{21} \mapsto 111110$, $s_{22} \mapsto 111111$ となる。



また，$\mathcal{S}^2$ 平均符号長は以下のように求まる。

$$0.49\times1+0.14\times3+0.07\times4+0.14\times3+0.04\times4+0.02\times5+0.07\times4+0.02\times6+0.01\times6 = 2.33$$

$\mathcal{S}$ のシンボルあたりの符号長に直すと，1.165 となる。これは，$\mathcal{S}$ を直接ハフマン符号化した場合の平均符号長，

$$0.7 \times 1 + 0.2 \times 2 + 0.1 \times 2 = 1.3$$

よりも小さい。また，エントロピーは，

$$0.6 \log_2 0.6 + 0.3 \log_2 0.3 + 0.1 \log_2 0.1 = 1.156$$

となり，平均符号長がエントロピーに近くなっている。

与えられた確率分布に対して，複数のハフマン符号ができる場合がある (解答は唯一ではない)。その場合でも，平均符号長はすべて等しい。