

学科・類：

学籍番号：

名前：

授業中に配布した用紙でない場合は、「コピー」と右上に大きく書くこと。

用紙が足りないときは、裏面を使ってよい。

1. 1つのジョブを処理できるコンピュータが2台と、3つのジョブを格納できる待ち行列からなるシステムを考える。このシステムには、平均 λ のポアソン到着でジョブが到着し、コンピュータが1台でも使用中でなければ、そのジョブをすぐにコンピュータに処理させ、コンピュータは使用中でも待ち行列に空きがあれば待ち行列に投入し、両者とも空いていなければ到着したジョブを拒否するものとする。1つのジョブの処理時間は平均 $1/\mu$ の指数分布で表せるものとする。このシステムの状態に関して、

$S(t) = 0$ が「コンピュータ、待ち行列ともにジョブなし」、

$S(t) = 1$ が「計算機でジョブ1つを処理中、待ち行列にはジョブなし」、

$S(t) = 2$ が「計算機でジョブ2つを処理中、待ち行列にはジョブなし」、

$S(t) = 3$ が「計算機でジョブ2つを処理中、待ち行列にジョブが1つ待機中」、

$S(t) = 4$ が「計算機でジョブ2つを処理中、待ち行列にジョブが2つ待機中」、

$S(t) = 5$ が「計算機でジョブ2つを処理中、待ち行列にジョブが3つ待機中」

を表すものとする。時刻 t において状態が $S(t) = i$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)である確率を $p_i(t)$ で表し、また、定常状態において状態が S_i である確率を p_i^* で表す。このとき、微小時間 $\Delta\tau$ における変化を考え、 $p_i(t + \Delta\tau)$ を $p_j(t)$ を使って表せ($\Delta\tau$ の1次近似)。そして、その式から微分方程式を求めよ。このとき、 $p_i(t)$ でなく、 $p_0(t), p_1(t), \dots$ のようにして、インデックス部分を具体的な数を使ったもので表すこと。さらに、時間微分項を0として、 p_i^* ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)を求め、定常状態における到着のリジェクト率を求めよ。解答は、裏面を使っても良い。

関係式は、

$$p_0(t + \Delta\tau) = (1 - \lambda\Delta\tau)p_0(t) + \mu\Delta\tau p_1(t)$$

$$p_1(t + \Delta\tau) = \lambda\Delta\tau p_0(t) + (1 - \lambda\Delta\tau - \mu\Delta\tau)p_1(t) + 2\mu\Delta\tau p_2(t)$$

$$p_2(t + \Delta\tau) = \lambda\Delta\tau p_1(t) + (1 - \lambda\Delta\tau - 2\mu\Delta\tau)p_2(t) + 2\mu\Delta\tau p_3(t)$$

$$p_3(t + \Delta\tau) = \lambda\Delta\tau p_2(t) + (1 - \lambda\Delta\tau - 2\mu\Delta\tau)p_3(t) + 2\mu\Delta\tau p_4(t)$$

$$p_4(t + \Delta\tau) = \lambda\Delta\tau p_3(t) + (1 - \lambda\Delta\tau - 2\mu\Delta\tau)p_4(t) + 2\mu\Delta\tau p_5(t)$$

$$p_5(t + \Delta\tau) = \lambda\Delta\tau p_4(t) + (1 - 2\mu\Delta\tau)p_5(t)$$

となる。この式を変形して微分方程式を得る。

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu)p_1(t) + 2\mu p_2(t)$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - (\lambda + 2\mu)p_2(t) + 2\mu p_3(t)$$

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda p_2(t) - (\lambda + 2\mu)p_3(t) + 2\mu p_4(t)$$

$$\frac{dp_4(t)}{dt} = \lambda p_3(t) - (\lambda + 2\mu)p_4(t) + 2\mu p_5(t)$$

$$\frac{dp_5(t)}{dt} = \lambda p_4(t) - 2\mu p_5(t)$$

定常状態では、微分項が0になる。 $p_i(t)$ を p_i^* に変えて、

$$\begin{aligned} -\lambda p_0^* + \mu p_1^* &= 0 \\ \lambda p_0^* - (\lambda + \mu)p_1^* + 2\mu p_2^* &= 0 \\ \lambda p_1^* - (\lambda + 2\mu)p_2^* + 2\mu p_3^* &= 0 \\ \lambda p_2^* - (\lambda + 2\mu)p_3^* + 2\mu p_4^* &= 0 \\ \lambda p_3^* - (\lambda + 2\mu)p_4^* + 2\mu p_5^* &= 0 \\ \lambda p_4^* - 2\mu p_5^* &= 0 \end{aligned}$$

を得る。

$\rho = \lambda/\mu$ とおけば、

$$\begin{aligned} p_1^* - \rho p_0^* &= 0 \\ p_2^* - \frac{\rho}{2}p_1^* &= \frac{1}{2}(p_1^* - \rho p_0^*) \\ p_3^* - \frac{\rho}{2}p_2^* &= p_2^* - \frac{\rho}{2}p_1^* \\ p_4^* - \frac{\rho}{2}p_3^* &= p_3^* - \frac{\rho}{2}p_2^* \\ p_5^* - \frac{\rho}{2}p_4^* &= p_4^* - \frac{\rho}{2}p_3^* \\ p_4^* - \frac{\rho}{2}p_3^* &= 0 \end{aligned}$$

となる。従って、

$$p_5^* - \frac{\rho}{2}p_4^* = p_4^* - \frac{\rho}{2}p_3^* = p_3^* - \frac{\rho}{2}p_2^* = p_2^* - \frac{\rho}{2}p_1^* = p_1^* - \rho p_0^* = 0$$

となり、

$$p_1^* = \rho p_0^*, \quad p_2^* = \frac{\rho^2}{2}p_0^*, \quad p_3^* = \frac{\rho^3}{4}p_0^*, \quad p_4^* = \frac{\rho^4}{8}p_0^*, \quad p_5^* = \frac{\rho^5}{16}p_0^*$$

となる。 $p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* + p_5^* = 1$ より、定常状態の確率は

$$\begin{aligned} p_0^* &= \frac{16}{16 + 16\rho + 8\rho^2 + 4\rho^3 + 2\rho^4 + \rho^5} \\ p_1^* &= \frac{16\rho}{16 + 16\rho + 8\rho^2 + 4\rho^3 + 2\rho^4 + \rho^5} \\ p_2^* &= \frac{8\rho^2}{16 + 16\rho + 8\rho^2 + 4\rho^3 + 2\rho^4 + \rho^5} \\ p_3^* &= \frac{4\rho^3}{16 + 16\rho + 8\rho^2 + 4\rho^3 + 2\rho^4 + \rho^5} \\ p_4^* &= \frac{2\rho^4}{16 + 16\rho + 8\rho^2 + 4\rho^3 + 2\rho^4 + \rho^5} \\ p_5^* &= \frac{\rho^5}{16 + 16\rho + 8\rho^2 + 4\rho^3 + 2\rho^4 + \rho^5} \end{aligned}$$

リジェクト率は、

$$p_5^* = \frac{\rho^5}{16 + 16\rho + 8\rho^2 + 4\rho^3 + 2\rho^4 + \rho^5}$$

である。