通信とネットワークの演習 (第６回目)

学科・類：　　　　　　　学籍番号：　　　　　　　　名前：

授業中に配布した用紙でない場合は,「コピー」と右上に大きく書くこと。
用紙が足りないときは，裏面を使ってよい。

１．外部へ接続する回線数が 4 である中継局に，平均 λ のポアソン到着で通信の要求が到着し，空いている回線があれば回線を割り当てるものとする。1 つの通信が回線を使用する時間は平均 $1/\mu$ の指数分布で表せるものとする。このシステムの状態の確率変数 $S(t)$ に関して，$S(t)=0$ が「通信なし」，$S(t)=1$ が「1 回線を使用中」，$S(t)=2$ が「2 回線を使用中」，$S(t)=3$ が「3 回線を使用中」，$S(t)=4$ が「4 回線を使用中」を表しているものとする (待ち行列はなし)。時刻 t において状態が $S(t)=i$ $(i=0,1,2,3,4)$ である確率を $p_i(t)$ で表し，また，定常状態 $(t\to\infty)$ において状態が $S(t)=i$ である確率を p_i^* で表す。このとき，微小時間 $\Delta\tau$ における変化を考え，$p_i(t+\Delta\tau)$ を $p_j(t)$ で表せ ($\Delta\tau$ の 1 次近似)。そして，その式から微分方程式を求めよ。このとき，$p_i(t)$ でなく，$p_0(t), p_1(t), \ldots$ のようにして，添字部分を具体的な数を使ったもので表すこと (微分方程式は 4 つ)。さらに，時間微分項を 0 として，p_i^* $(i=0,1,2,3,4)$ を求め，定常状態における到着のリジェクト率，使用される回線の平均の数，平均システム遅延を求めよ。

関係式は,

$$
\begin{aligned}
p_0(t+\Delta\tau) &= (1-\lambda\Delta\tau)p_0(t)+\mu\Delta\tau p_1(t)\\
p_1(t+\Delta\tau) &= \lambda\Delta\tau p_0(t)+(1-\lambda\Delta\tau-\mu\Delta\tau)p_1(t)+2\mu\Delta\tau p_2(t)\\
p_2(t+\Delta\tau) &= \lambda\Delta\tau p_1(t)+(1-\lambda\Delta\tau-2\mu\Delta\tau)p_2(t)+3\mu\Delta\tau p_3(t)\\
p_3(t+\Delta\tau) &= \lambda\Delta\tau p_2(t)+(1-\lambda\Delta\tau-3\mu\Delta\tau)p_3(t)+4\mu\Delta\tau p_4(t)\\
p_4(t+\Delta\tau) &= \lambda\Delta\tau p_3(t)+(1-4\mu\Delta\tau)p_4(t)
\end{aligned}
$$

となる。この式を変形して微分方程式を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t)+\mu p_1(t)\\
\frac{dp_1(t)}{dt} &= \lambda p_0(t)-(\lambda+\mu)p_1(t)+2\mu p_2(t)\\
\frac{dp_2(t)}{dt} &= \lambda p_1(t)-(\lambda+2\mu)p_2(t)+3\mu p_3(t)\\
\frac{dp_3(t)}{dt} &= \lambda p_2(t)-(\lambda+3\mu)p_3(t)+3\mu p_4(t)\\
\frac{dp_4(t)}{dt} &= \lambda p_3(t)-4\mu p_4(t)
\end{aligned}
$$

定常状態では，微分項が 0 になる。

$$
\begin{aligned}
-\lambda p_0^*+\mu p_1^* &= 0\\
\lambda p_0^*-(\lambda+\mu)p_1^*+2\mu p_2^* &= 0\\
\lambda p_1^*-(\lambda+2\mu)p_2^*+3\mu p_3^* &= 0\\
\lambda p_2^*-(\lambda+3\mu)p_3^*+4\mu p_4^* &= 0\\
\lambda p_3^*-4\mu p_4^* &= 0
\end{aligned}
$$

$\rho=\lambda/\mu$ とおけば,

$$
\begin{aligned}
p_1^*-\rho p_0^* &= 0\\
p_2^*-\frac{\rho}{2}p_1^* &= \frac{1}{2}(p_1^*-\rho p_0^*)\\
p_3^*-\frac{\rho}{3}p_2^* &= \frac{2}{3}(p_2^*-\frac{\rho}{2}p_1^*)\\
p_4^*-\frac{\rho}{4}p_3^* &= \frac{3}{4}(p_3^*-\frac{\rho}{3}p_2^*)\\
p_4^*-\frac{\rho}{4}p_3^* &= 0
\end{aligned}
$$

となるので,

$$p_1^*=\rho p_0^*,\ p_2^*=(\rho/2)p_1^*=(\rho^2/2)p_0^*,\ p_3^*=(\rho/3)p_2^*=(\rho^3/6)p_0^*,\ p_4^*=(\rho/4)p_3^*=(\rho^4/24)p_0^*$$

となる。$p_0^*+p_1^*+p_2^*+p_3^*+p_4^*=1$ より，定常状態の確率は

$$
\begin{aligned}
p_0^* &= \frac{1}{1+\rho+(\rho^2/2)+(\rho^3/6)+(\rho^4/24)}\\
p_1^* &= \frac{\rho}{1+\rho+(\rho^2/2)+(\rho^3/6)+(\rho^4/24)}\\
p_2^* &= \frac{\rho^2/2}{1+\rho+(\rho^2/2)+(\rho^3/6)+(\rho^4/24)}\\
p_3^* &= \frac{\rho^3/6}{1+\rho+(\rho^2/2)+(\rho^3/6)+(\rho^4/24)}\\
p_3^* &= \frac{\rho^3/24}{1+\rho+(\rho^2/2)+(\rho^3/6)+(\rho^4/24)}
\end{aligned}
$$

となる。リジェクト率は,

$$p_4^*=\frac{\rho^2/24}{1+\rho+(\rho^2/2)+(\rho^3/6)+(\rho^4/24)}$$

である。使用される回線の平均の数は,

$$
\begin{aligned}
N &= p_1^*+2p_2^*+3p_3^*+4p_4^*=\frac{\rho+\frac{2}{2}\rho^2+\frac{3}{6}\rho^3+\frac{4}{24}\rho^4}{1+\rho+(\rho^2/2)+(\rho^3/6)+(\rho^4/24)}\\
&= \frac{\rho+\rho^2+\frac{1}{2}\rho^3+\frac{1}{6}\rho^4}{1+\rho+(\rho^2/2)+(\rho^3/6)+(\rho^4/24)}
\end{aligned}
$$

である。平均システム遅延は，リジェクトされたものを平均に算入しないと，リトルの公式により,

$$\frac{N}{\lambda(1-p_4^*)}=\frac{\rho+\rho^2+\frac{1}{2}\rho^3+\frac{1}{6}\rho^4}{\lambda(1-p_3^*)\left(1+\rho+(\rho^2/2)+(\rho^3/6)+(\rho^4/24)\right)}=\frac{1}{\mu}$$