

学科・類：

学籍番号：

名前：

授業中に配布した用紙でない場合は、「コピー」と右上に大きく書くこと。
用紙が足りないときは、裏面を使ってよい。

1. ポアソン分布の分布関数を得るために使った等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}_n C_k \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{n-k} = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

を証明せよ。

参考：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = e^a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^k = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) = 1$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} {}_n C_k \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{n-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \frac{\left(1 + \frac{-\lambda t}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{-\lambda t}{n} \right)^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) \frac{(\lambda t)^k}{k!} \frac{\left(1 + \frac{-\lambda t}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{-\lambda t}{n} \right)^k} \\ &= 1 \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \frac{e^{-\lambda t}}{1} \\ &= \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \end{aligned}$$