

問 1 . 本講義の内容に関して、次の文章 (表) の空欄 (1) ~ (A) を埋めよ。 ($2 \times 27 = 54$ 点)

- デジタル変調方式において、PSK は (a) の略であり、16QAM は搬送波の (b) を変化させ、1 つのシンボルで (c) bit の情報を送ることができる。
- 電波が受信端へ多数の経路を通過して到達することを意味する (d) は、受信端で場所や時間によって受信電力が変化する現象を意味する (e) を引き起こす。また、電波の伝搬経路の長さの違いによって (f) が生じるため、信号と信号の何も送らない時間である (g) が必要となり、伝送速度が低下する。
- (h) (具体的に) などに使われている OFDM は (i) (日本語 or 英語のどちらでもよい) の略であり、サブキャリアによる周波数帯域に重なりが (j) が、それらが (k) しているため、独立な通信が可能であり、通常のマルチキャリア通信より周波数の利用効率が高いという利点がある。そして、シングルキャリア通信に比べて、1 つのキャリアによる通信速度が (l) くなるため、(m) という利点をもつ。
- スペクトル拡散方式には、(n) 方式と (o) 方式がある。
- 情報源 S のシンボル s_1, s_2, s_3, s_4 を、2 元符号で下の表のように符号化した。空欄に該当する場合は $\circ$ 、該当しない場合は $\times$ を記入せよ。

符号語	一意復号可能		瞬時復号可能	
'00', '01', '10', '11'	(p)		(q)	
'11', '110', '00', '000'	(r)		(s)	
'1', '10', '100', '000'	(t)		(u)	
'1', '01', '001', '000'	(v)		(w)	

- n 個の r 元符号の符号長を l_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とするとき、(x) 可能な符号が存在するための必要十分条件であるクラフトの不等式は (y) と表される。
- 通信路符号化定理によって、誤りが生じる 2 元対称通信路で、(z) が (A) よりも小さければ、いくらでも誤り率を下げる可以降低符号が存在することが示されている。

問 2 . 通信路 Γ に入力するシンボルを a_i ($i = 1, 2, \dots, s$)、 Γ が出力するシンボル b_j ($j = 1, 2, \dots, r$) とする。両者を表す確率変数を、それぞれ A, B とする。 a_i が入力される確率 $P(A = a_i)$ を p_i で表す。また、 a_i が入力されたとき出力が b_j である条件付き確率を $P_{ij} = P(B = b_j | A = a_i)$ で表す。次の値を、確率を表すものとしては p_i, P_{ij} だけを使って表しなさい ($\log$ の底は規定しなくてもよい)。 ($2 \times 8 = 16$ 点)

- a_i と b_j の同時 (結合) 確率
- b_j の出現確率
- b_j が出力されるとき入力が a_i である条件付き確率 $P(A = a_i | B = b_j)$
- 入力を情報源としたときの情報源のエントロピー
- 出力を情報源としたときの情報源のエントロピー
- 入力が与えられるときの出力の条件付きエントロピー
- 出力が与えられるときの入力の条件付きエントロピー
- 入力と出力の相互情報量

なお、 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の $x_1, x_2, \dots, x_n$ を動かしたときの最大値を、 $\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ で表すものとする。 (p_i, P_{ij}) だけで表せない場合は、適当な確率を定義して式を記しても、70%程度加点する。)

問 3 . f_c を 1 より十分大きな実数として , 信号 $x(t)$ を ,

$$x(t) = \text{sinc}(\pi t) \cos(2\pi f_c t)$$

とし , それをフーリエ変換したものを $X(f)$ とする。

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

$X(f)$ の絶対値 $|X(f)|$ をグラフで表しなさい。このとき , 特徴的な値をグラフに記しなさい。(15 点)

ヒント : sinc 関数のフーリエ変換は難しいため , 何を逆フーリエ変換すると sinc 関数になるかを考える。

問 4 . 情報源 S の 3 のシンボル s_0, s_1, s_2 に対する , 出現確率が $p_0 = 0.5, p_1 = 0.4, p_2 = 0.1$ であるものとする。このとき以下の問いに答えよ。(3 × 5 = 15 点)

(a) S のハフマン符号を求めよ (作成するときの図を示すこと)。

(b) (a) で求めた符号の平均符号長を求めよ。

(c) 拡大情報源 S^2 (s_i と s_j を組み合わせたシンボルを s_{ij} で表す) に対するハフマン符号を求めよ (図を示すこと)。

(d) (c) で求めた符号の平均符号長 (値は 2.78) を求める式を記せ。

(e) S のエントロピーは , 約 1.3610bit となる。(b), (d) で求めた値との関係を論ぜよ (適切な定理を用いて論じること)。

解答用紙

学科・類：

学籍番号：

名前：

問 1 .

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)

(i)

(j)

(k)

(l)

(m)

(n)

(o)

(p)

(q)

(r)

(s)

(t)

(u)

(v)

(w)

(x)

(y)

(z)

(A)

問2 .

問 4 .

学科・類：

学籍番号：

名前：

問 1 .

- (a) Phase Shift Keying
- (b) 振幅と位相
- (c) 4
- (d) マルチパス
- (e) フェージング
- (f) 伝送遅延差
- (g) ガードインターバル
- (h) 無線 LAN , 地上波テレビ放送 , LTE(4G) の移動体通信
- (i) 直交周波数分割多重方式 (Orthogonal frequency division multiplexing)
- (j) ある
- (k) 直交
- (l) 低
- (m) 伝送遅延差による (前後の信号が混合するという) 問題の影響が軽減できる
- (n) 直接拡散
- (o) 周波数ホッピング
- (p) ○ (q) ○ (r) × (s) × (t) ○ (u) × (v) ○ (w) ○
- (x) 瞬時複号
- (y) $\sum_{i=1}^n r^{-l_i} \leq 1$
- (z) 伝送速度 (伝送レート)
- (A) 通信容量

問 2 .

1) 同時確率分布 $R_{ij} = P(A = a_i, B = b_j)$ は , 次のようになる。

$$R_{ij} = p_i P_{ij}$$

2) b_j が出現する確率 $q_j = P(B = b_j)$ は , 次のようになる。

$$q_j = \sum_{k=1}^s R_{kj} = \sum_{k=1}^r p_k P_{kj}$$

3) $Q_{ij} = P(A = a_i | B = b_j)$ は , ベイズの定理から ,

$$Q_{ij} = \frac{P(A = a_i, B = b_j)}{P(B = b_j)} = \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^s p_k P_{kj}}$$

4) 入力情報源のエントロピーは , 次式のようにになる。

$$H(\mathcal{A}) = - \sum_{i=1}^s p_i \log p_i$$

5) 出力情報源のエントロピーは , 次式のようにになる。

$$H(\mathcal{B}) = - \sum_{j=1}^r q_j \log q_j = - \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^r p_k P_{kj} \right) \log \left(\sum_{k=1}^r p_k P_{kj} \right)$$

6) 入力を与えられたときの出力の条件付きエントロピーは , 次式のようにになる。

$$H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^s p_i H(\mathcal{A}|a_i) = - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r p_i P_{ij} \log P_{ij}$$

7) 出力を与えられたときの入力の条件付きエントロピーは , 次式のようにになる。

$$\begin{aligned} H(\mathcal{A}|\mathcal{B}) &= \sum_{j=1}^r q_j H(\mathcal{A}|b_j) \\ &= \sum_{j=1}^r q_j \left(- \sum_{i=1}^s P(A = a_i | B = b_j) \log P(A = a_i | B = b_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^s p_k P_{kj} \right) \left(- \sum_{i=1}^s \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^s p_k P_{kj}} \log \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^s p_k P_{kj}} \right) \\ &= - \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^s p_i P_{ij} \log \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^s p_k P_{kj}} \end{aligned}$$

8) 相互情報量は , $I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) - H(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ であるから , 次式のようにになる。

$$I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = - \sum_{i=1}^s p_i \log p_i + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^s p_i P_{ij} \log \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^s p_k P_{kj}}$$

または , $I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = I(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ であるから , 次式でもよい。

$$I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = - \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^s p_k P_{kj} \right) \log \left(\sum_{k=1}^s p_k P_{kj} \right) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r p_i P_{ij} \log P_{ij}$$

問3 .

$S(f)$ を ,

$$S(f) = \begin{cases} 1 & (-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

とおく。 $S(f)$ を逆フーリエ変換すれば ,

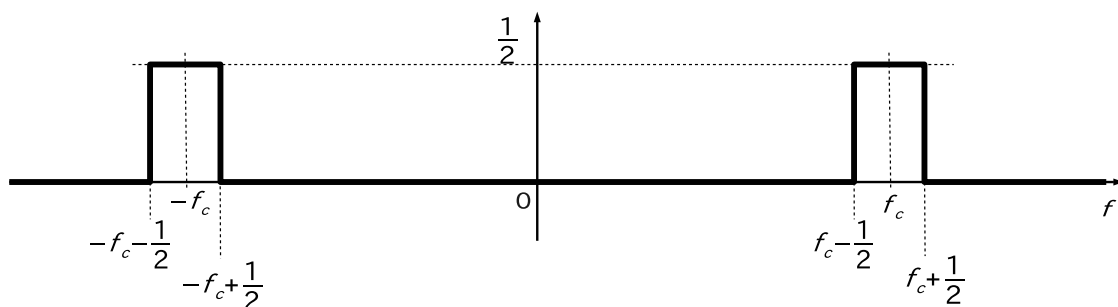
$$\int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{2\pi i f t} df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i f t} df = \frac{1}{2\pi i t} [e^{2\pi i f t}]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi t} \frac{e^{\pi i t} - e^{-\pi i t}}{2i} = \text{sinc}(\pi t)$$

となる。従って、 $\text{sinc}(\pi t)$ をフーリエ変換したものは、 $S(f)$ となる。

$x(t)$ をフーリエ変換する。

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\pi t) \cos(2\pi f_c t) e^{-2\pi i f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\pi t) \frac{e^{2\pi i f_c t} + e^{-2\pi i f_c t}}{2} e^{-2\pi i f t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\pi t) e^{-2\pi i (f - f_c) t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\pi t) e^{-2\pi i (f + f_c) t} dt \\ &= \frac{1}{2} S(f - f_c) + \frac{1}{2} S(f + f_c) \end{aligned}$$

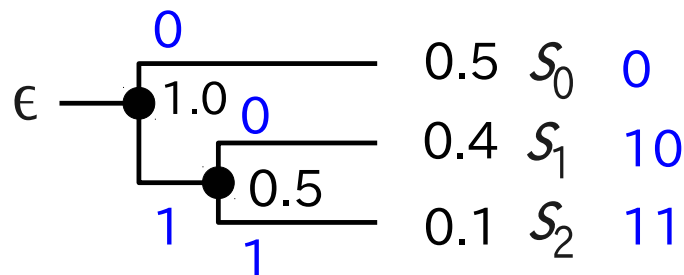
となる。 f_c が1より十分大きいため、 $|X(f)|$ に関して、次のようなグラフを書くことができる。



問4 .

(a)

下図のように, s_1, s_2, s_3 に, それぞれ, 0, 10, 11 を割り振ればよい。

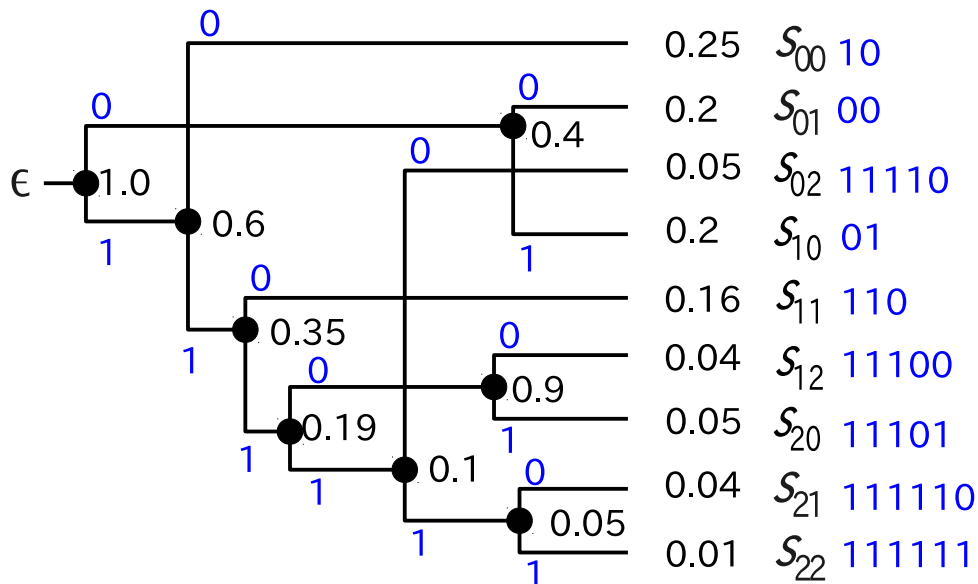


(b) この平均符号長は以下のように求まる。

$$0.5 \times 1 + 0.4 \times 2 + 0.1 \times 2 = 1.5$$

(c)

拡大情報源のシンボル s_{ij} の出現確率 p_{ij} は, $p_{00} = 0.25, p_{01} = 0.20, p_{02} = 0.05, p_{10} = 0.20, p_{11} = 0.16, p_{12} = 0.04, p_{20} = 0.05, p_{21} = 0.04, p_{22} = 0.01$ となるので, ハフマン符号は下図のようになる (シンボルの順番は入れ替えている)。



(d) この平均符号長は以下のように求まる。

$$0.25 \times 2 + 0.2 \times 2 + 0.05 \times 5 + 0.2 \times 2 + 0.16 \times 3 + 0.04 \times 5 + 0.05 \times 5 + 0.04 \times 6 + 0.01 \times 6 = 2.78$$

(e)

拡大情報源 S^2 を使うと, S のシンボルあたりの符号長は, 平均で $2.78/2 = 1.39$ bit となる。これは, S を直接ハフマン符号化した場合の, 1.5 bit よりも小さく, 少ないデータ量で符号化することができる。 S のエントロピーが, 約 1.361 bit であるので, シャノンの情報源符号化定理より, さらに情報源を拡大すれば, エントロピーに近い値のデータ量で符号化することができる。