

問 1 . 本講義の内容に関して、次の文章 (表) の空欄 (1) ~ (y) を埋めよ。 ($2 \times 25 = 50$ 点)

- デジタル変調方式において、QPSK は Quadrature (a) の略であり、搬送波の (b) を変化させ、1 つのシンボルで (c) bit の情報を送ることができる。
- 電波が (d) ことを意味するマルチパスは、受信側で (e) を意味するフェージングを引き起こす。また、電波の伝搬経路の長さの違いによって (f) が生じるため、(g) であるガードインターバルが必要となり、伝送速度が低下する。
- W-CDMA や Bluetooth に使われている (h) 通信方式は、伝送したい信号の周波数帯域より広い周波数帯域を使って伝送する。その中で、Bluetooth は (i) 方式を、W-CDMA は (j) 方式を使っている。(i) 方式では (k) ことによって周波数帯域を広げている。
- 情報源 S のシンボル s_1, s_2, s_3, s_4 を、2 元符号で下の表のように符号化した。空欄に該当する場合は $\circ$ 、該当しない場合は $\times$ を記入せよ。

符号語	一意復号可能		瞬時復号可能	
'0', '10', '010', '011'	(l)		(m)	
'0', '10', '110', '111'	(n)		(o)	
'00', '01', '10', '11'	(p)		(q)	
'0', '01', '011', '111'	(r)		(s)	

- n 個の r 元符号の符号長を l_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とするとき、(t) 可能な符号が存在するための必要十分条件であるマクミランの不等式は (u) と表される。
- 通信路符号化定理によって、誤りが生じる 2 元対称通信路で、(v) が (w) よりも小さければ、いくらでも誤り率を下げる可以降低の符号が存在することが示されている。ここで、(w) は、(x) を変化させたときの (y) の最大値である。

問 2 . 通信路 Γ に入力するシンボルを a_i ($i = 1, 2, \dots, s$)、 Γ が出力するシンボル b_j ($j = 1, 2, \dots, r$) とする。両者を表す確率変数を、それぞれ A, B とする。 b_i が出力される確率 $P(B = b_i)$ を q_i で表す。また、 b_j が出力されたとき入力が a_i であった条件付き確率を $Q_{ij} = P(A = a_i | B = b_j)$ で表す。次の値を、確率を表すものとしては q_i, Q_{ij} だけを使って表しなさい (log の底は規定しなくても良い)。 ($3 \times 4 + 2 \times 4 = 20$ 点)

- a_i と b_j の同時 (結合) 確率
- a_i の出現確率
- a_i が入力されとき、出力が b_j である条件付き確率 $P(B = b_j | A = a_i)$
- 入力を情報源としたときの情報源のエントロピー
- 出力を情報源としたときの情報源のエントロピー
- 入力を与えられるときの出力の条件付きエントロピー
- 出力を与えられるときの入力の条件付きエントロピー
- 入力と出力の相互情報量

(q_i, Q_{ij} だけで表せない場合は、適当な確率を定義して式を記しても、60%程度加点する。)

問 3 . 信号 $x(t)$ をフーリエ変換したものを $X(f)$ とする。

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ift} dt$$

$x(t)$ が周波数 M で帯域制限されているとする。すなわち ,

$$X(f) = 0 \quad (|f| \geq M)$$

が成立するものとする。 $X(f)$ を $[-M, M]$ でフーリエ級数展開

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{\pi in}{M} f}$$

によって表したとき , その係数 c_n を $x(t)$ などを用いて表せ。(15 点)

問 4 . 情報源 S の 3 のシンボル s_0, s_1, s_2 に対する , 出現確率が $p_0 = 0.8, p_1 = 0.1, p_2 = 0.1$ であるものとする。このとき以下の問いに答えよ。(3 × 5 = 15 点)

- (a) S のハフマン符号を求めよ (作成するときの図を示すこと)。
- (b) (a) で求めた符号の平均符号長を求めよ。
- (c) 拡大情報源 S^2 (s_i と s_j を組み合わせたシンボルを s_{ij} で表す) に対するハフマン符号を求めよ (図を示すこと)。
- (d) (c) で求めた符号の平均符号長 (値は 1.92) を求める式を記せ。
- (e) S のエントロピーは , 約 0.922bit となる。(b), (d) で求めた値との関係を論ぜよ (適切な定理を用いて論じること)。

解答用紙

学科・類：

学籍番号：

名前：

問 1 .

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)

(i)

(j)

(k)

(l)

(m)

(n)

(o)

(p)

(q)

(r)

(s)

(t)

(u)

(v)

(w)

(x)

(y)

問2 .

学科・類： 学籍番号： 名前：

問3 .

問 4 .

学科・類：

学籍番号：

名前：

問 1 .

(a) Phase Shift Keying

(b) 位相

(c) 2

(d) 複数の経路を通る

(e) 場所や時間によって受信電力が変化する現象

(f) 伝送遅延差

(g) 信号と信号の何も送らない時間

(h) スペクトル拡散

(i) 周波数ホッピング

(j) 直接拡散

(k) 搬送波の周波数を高速に切り替える

(l) × (m) × (n) ○ (o) ○ (p) ○ (q) ○ (r) ○ (s) ×

(t) 一意複号

(u) $\sum_{i=1}^n r^{-l_i} \leq 1$

(v) 伝送速度 (伝送レート)

(w) 通信容量

(x) 入力シンボルの出現確率

(y) 相互情報量

問 2 .

1) 同時確率分布 $R_{ij} = P(A = a_i, B = b_j)$ は , 次のようになる。

$$R_{ij} = q_j Q_{ij}$$

2) a_i が出現する確率 $p_i = P(A = a_i)$ は , 次のようになる。

$$p_i = \sum_{k=1}^r R_{ik} = \sum_{k=1}^r q_k Q_{ik}$$

3) $P(B = b_j | A = a_i)$ は , ベイズの定理から ,

$$P(B = b_j | A = a_i) = \frac{P(A = a_i, B = b_j)}{P(A = a_i)} = \frac{q_j Q_{ij}}{\sum_{k=1}^r q_k Q_{ik}}$$

4) 入力情報源のエントロピーは , 次式のようにになる。

$$H(\mathcal{A}) = - \sum_{i=1}^s p_i \log p_i = - \sum_{i=1}^s \left(\sum_{k=1}^r q_k Q_{ik} \right) p_i \log \left(\sum_{k=1}^r q_k Q_{ik} \right)$$

5) 出力情報源のエントロピーは , 次式のようにになる。

$$H(\mathcal{B}) = - \sum_{j=1}^r q_j \log q_j$$

6) 入力を与えられたときの出力の条件付きエントロピーは , 次式のようにになる。

$$\begin{aligned} H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) &= \sum_{i=1}^s p_i H(\mathcal{B}|a_i) \\ &= \sum_{i=1}^s p_i \left(- \sum_{j=1}^r P(B = b_j | A = a_i) \log P(B = b_j | A = a_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^s \left(\sum_{k=1}^r q_k Q_{ik} \right) \left(- \sum_{j=1}^r \frac{q_j Q_{ij}}{\sum_{k=1}^r q_k Q_{ik}} \log \frac{q_j Q_{ij}}{\sum_{k=1}^r q_k Q_{ik}} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r q_j Q_{ij} \log \frac{q_j Q_{ij}}{\sum_{k=1}^r q_k Q_{ik}} \end{aligned}$$

7) 出力を与えられたときの入力の条件付きエントロピーは , 次式のようにになる。

$$H(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \sum_{j=1}^r q_j H(\mathcal{A}|b_j) = - \sum_{j=1}^r q_j \sum_{i=1}^s Q_{ij} \log Q_{ij}$$

8) 相互情報量は , $I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) - H(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ であるから , 次式のようにになる。

$$I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = - \sum_{i=1}^s \left(\sum_{k=1}^r q_k Q_{ik} \right) \log \left(\sum_{k=1}^r q_k Q_{ik} \right) + \sum_{j=1}^r q_j \sum_{i=1}^s Q_{ij} \log Q_{ij}$$

または , $I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H(\mathcal{B}) - H(\mathcal{B}|\mathcal{A})$ であるから , 次式のようにになる。

$$I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = - \sum_{j=1}^r q_j \log q_j - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r q_j Q_{ij} \log \frac{q_j Q_{ij}}{\sum_{k=1}^r q_k Q_{ik}}$$

問 3 .

複素数表現のフーリエ級数展開係数の式より ,

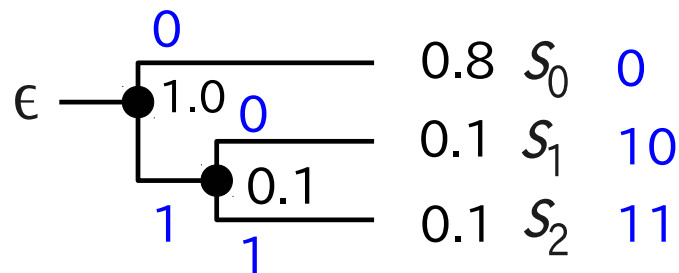
$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2M} \int_{-M}^M X(f) e^{\frac{-\pi i n f}{M}} \\&= \frac{1}{2M} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{\frac{-\pi i n f}{M}} \\&= \frac{1}{2M} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{2\pi i f \left(\frac{-n}{2M}\right)} \\&= \frac{1}{2M} x\left(\frac{-n}{2M}\right)\end{aligned}$$

となり , $x(t)$ を時間間隔 $\frac{1}{2M}$ で標本化したもの $1/(2M)$ 倍になる。

問 4 .

(a)

下図のように, s_1, s_2, s_3 に, それぞれ, 0, 10, 11 を割り振ればよい。

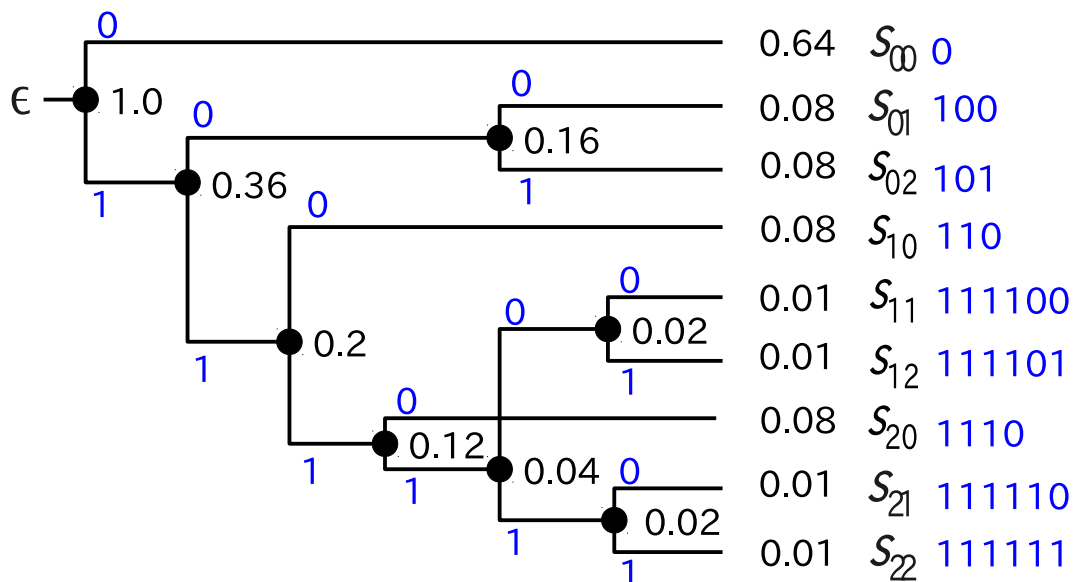


(b) この平均符号長は以下のように求まる。

$$0.8 \times 1 + 0.1 \times 2 + 0.1 \times 2 = 1.2$$

(c)

拡大情報源のシンボル s_{ij} の出現確率 p_{ij} は, $p_{00} = 0.64, p_{01} = 0.08, p_{02} = 0.08, p_{10} = 0.08, p_{11} = 0.01, p_{12} = 0.01, p_{20} = 0.08, p_{21} = 0.01, p_{22} = 0.01$ となるので, ハフマン符号は下図のようになる (シンボルの順番は入れ替えている)。



(d) この平均符号長は以下のように求まる。

$$0.64 \times 1 + 0.08 \times 3 + 0.08 \times 3 + 0.08 \times 3 + 0.01 \times 6 + 0.01 \times 6 + 0.08 \times 4 + 0.01 \times 6 + 0.01 \times 6 = 1.92$$

(e)

拡大情報源 S^2 を使うと, S のシンボルあたりの符号長は, 平均で $1.92/2 = 0.96$ bit となる。これは, S を直接ハフマン符号化した場合の, 1.2 bit よりも小さく, 少ないデータ量で符号化することができる。 S のエントロピーが, 約 0.922 bit であるので, シャノンの情報源符号化定理より, さらに情報源を拡大すれば, エントロピーに近い値のデータ量で符号化することができる。