通信とネットワーク 期末試験

問1． 本講義の内容に関して，次の文章 (表) の空欄 (1) ～ (z) を埋めよ。($2 \times 26 = 52$ 点)

- ディジタル変調方式において，(a) QAM は搬送波の (b) と (c) を変化させ，1 つのシンボルで 4bit の情報を送ることができる。
- 電波が複数の経路を通る (d) などによって生じる (e) は，受信側では場所や時間によって受信電力が変化する現象を意味する。また，(e) の伝搬経路の長さの違いによって (f) が生じるため，信号と信号の何も送らない時間である (g) が必要となるため，伝送速度が低下する。
- W-CDMA や Bluetooth に使われている (h) 通信方式は，伝送したい信号の周波数帯域より広い周波数帯域を使って伝送する。その中で，(i) は直接拡散方式を，(j) は周波数ホッピング方式を使っている。直接拡散方式では (k) ことなどによって周波数帯域を広げている。
- 時間信号 $g(t)$ をフーリエ変換したものを $G(f)$ とする。いま，$g(t)$ を時間 T 間隔で標本化するとき，$|f| \geq$ (l) のとき (m) が成立すれば，標本化した値 $g(nT)$ からもとの信号 $g(t)$ を，式 (n) によって得ることができる。なお，(l) を (o) 周波数と呼ぶ。
- 情報源 $\mathcal{S}$ のシンボル s_1，s_2，s_3，s_4 を，2 元符号で下の表のように符号化した。空欄に該当する場合は○，該当しない場合は×を記入せよ。

符号語	一意復号可能	瞬時復号可能
'00', '01', '10', '11'	(p)	(q)
'0', '01', '111', '110'	(r)	(s)
'0', '10', '110', '1110'	(t)	(u)
'0', '01', '011', '111'	(v)	(w)

- n 個の r 元符号の符号長を l_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とするとき，クラメルの不等式は (x) と表される。
- 通信路符号化定理によって，誤りが生じる 2 元対称通信路で，(y) が (z) よりも小さければ，いくらでも誤り率を下げることができる符号が存在することが示されている。

問2． 通信路 Γ に入力するシンボルを a_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$，Γ が出力するシンボル b_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ とする。両者を表す確率変数を，それぞれ A，B とする。a_i が入力される確率 $P(A = a_i)$ を p_i で表す。また，a_i が入力されたとき出力が b_j である条件付き確率を $P_{ij} = P(B = b_j | A = a_i)$ で表す。次の値を，確率を表すものとしては p_i，P_{ij} だけを使って表しなさい (log の底は規定しなくても良い)。($2 \times 9 = 18$ 点)

1) a_i と b_j の同時 (結合) 確率
2) b_j の出現確率
3) b_j が出力されとき入力が a_i である条件付き確率 $P(A = a_i | B = b_j)$
4) 入力を情報源としたときの情報源のエントロピー
5) 出力を情報源としたときの情報源のエントロピー
6) 入力が与えられるときの出力の条件付きエントロピー
7) 出力が与えられるときの入力の条件付きエントロピー
8) 入力と出力の相互情報量
9) 通信容量 (チャンネルキャパシティ)

なお，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を動かしたときの最大値を，$\max_{x_1, x_2, \ldots, x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で表すものとする。(p_i，P_{ij} **だけで表せない場合は，適当な確率を定義して式を記しても，70%程度加点する。**)

問３． 幅 T のパルスを周波数 f_c で搬送波で変調した信号

$$g(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_c t) & (-T/2 \le t \le T/2) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

をフーリエ変換せよ。そして，$f_c \gg 2/T$ として，フーリエ変換して得られた関数のグラフを書き，そのパルスが占める周波数帯域に関して論じよ。(15 点)

ヒント: フーリエ変換

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

cos 関数

$$\cos 2\pi f_c t = \frac{1}{2}(e^{2\pi i f_c t} + e^{-2\pi i f_c t})$$

問４． 情報源 $\mathcal{S}$ の 3 のシンボル s_0, s_1, s_2 に対する，出現確率が $p_0 = 0.5$, $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.1$ であるものとする。このとき以下の問いに答えよ。($3 \times 5 = 15$ 点)

(a) $\mathcal{S}$ のハフマン符号を求めよ (作成するときの図を示すこと)。

(b) (a) で求めた符号の平均符号長を求めよ。

(c) 拡大情報源 $\mathcal{S}^2$ (s_i と s_j を組み合わせたシンボルを s_{ij} で表す) に対するハフマン符号を求よ (図を示すこと)。

(d) (d) で求めた符号の平均符号長 (値は 2.78) を求める式を記せ。

(e) $\mathcal{S}$ のエントロピーは，約 1.3621bit となる。(b), (d) で求めた値との関係を論ぜよ (**適切な定理を用いて論じること**)。

解答用紙

学科・類：　　　　　　学籍番号：　　　　　　名前：

問１.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)

(i)

(j)

(k)

(l)

(m)

(n)

(o)

(p) (q) (r) (s) (t) (u) (v) (w)

(x)

(y)

(z)

問２.

問３．

問４.

解答用紙

学科・類：　　　　　　学籍番号：　　　　　　名前：

問１.

(a) 16

(b) 振幅 ((b),(c) は順番が反対でも良い)

(c) 位相

(d) マルチパス

(e) フェージング

(f) 伝送遅延差

(g) ガードインターバル

(h) スペクトル拡散

(i) W-CDMA

(j) Bluetooth

(k) ランダムに高速に 0/1 が変化する系列と入力との EXOR の結果を，送信する 0/1 系列とする

(l) $1/(2T)$

(m) $G(f) = 0$

(n)

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) \frac{\sin \pi(t - nT)/T}{\pi(t - nT)/T}$$

(o) ナイキスト周波数

(p) ○ **(q)** ○ **(r)** × **(s)** × **(t)** ○ **(u)** ○ **(v)** ○ **(w)** ×

(x) $\sum_{i=1}^{n} r^{-l_i} \le 1$

(y) 伝送速度 (伝送レート)

(z) 通信容量

問２.

1) 同時確率分布 $R_{ij} = P(A = a_i, B = b_j)$ は，次のようになる。

$$R_{ij} = p_i P_{ij}$$

2) b_j が出現する確率 $q_j = P(B = b_j)$ は，次のようになる。

$$q_j = \sum_{k=1}^{s} R_{kj} = \sum_{k=1}^{r} p_k P_{kj}$$

3) $Q_{ij} = P(A = a_i|B = b_j)$ は，ベイズの定理から，

$$Q_{ij} = \frac{P(A = a_i, B = b_j)}{P(B = b_j)} = \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^{s} p_k P_{kj}}$$

4) 入力情報源のエントロピーは，次式のようになる。

$$H(\mathcal{A}) = -\sum_{i=1}^{s} p_i \log p_i$$

5) 出力情報源のエントロピーは，次式のようになる。

$$H(\mathcal{B}) = -\sum_{i=1}^{r} q_j \log q_j = -\sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{r} p_k P_{kj} \right) \log \left(\sum_{k=1}^{r} p_k P_{kj} \right)$$

6) 入力が与えられたときの出力の条件付きエントロピーは，次式のようになる。

$$H(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{s} p_i H(\mathcal{A}|a_i) = -\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} p_i P_{ij} \log P_{ij}$$

7) 出力が与えられたときの入力の条件付きエントロピーは，次式のようになる。

$$\begin{aligned}
H(\mathcal{A}|\mathcal{B}) &= \sum_{j=1}^{r} q_j H(\mathcal{A}|b_j) \\
&= \sum_{j=1}^{r} q_j \left(-\sum_{i=1}^{s} P(A = a_i|B = b_j) \log P(A = a_i|B = b_j) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{s} p_k P_{kj} \right) \left(-\sum_{i=1}^{s} \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^{s} p_k P_{kj}} \log \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^{s} p_k P_{kj}} \right) \\
&= -\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{s} p_i P_{ij} \log \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^{s} p_k P_{kj}}
\end{aligned}$$

8) 相互情報量は，$I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) - H(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ であるから，次式のようになる。

$$I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -\sum_{i=1}^{s} p_i \log p_i + \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{s} p_i P_{ij} \log \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^{s} p_k P_{kj}}$$

または，$I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = I(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ であるから，次式でもよい。

$$I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -\sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{s} p_k P_{kj} \right) \log \left(\sum_{k=1}^{s} p_k P_{kj} \right) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} p_i P_{ij} \log P_{ij}$$

9) チャンネルキャパシティは，p_i を変化させたときの，相互情報量の最大値であるから，次式が成立する。

$$\max_{p_1, p_2 \ldots, p_s} \left[-\sum_{i=1}^{s} p_i \log p_i + \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{s} p_i P_{ij} \log \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^{s} p_k P_{kj}} \right]$$

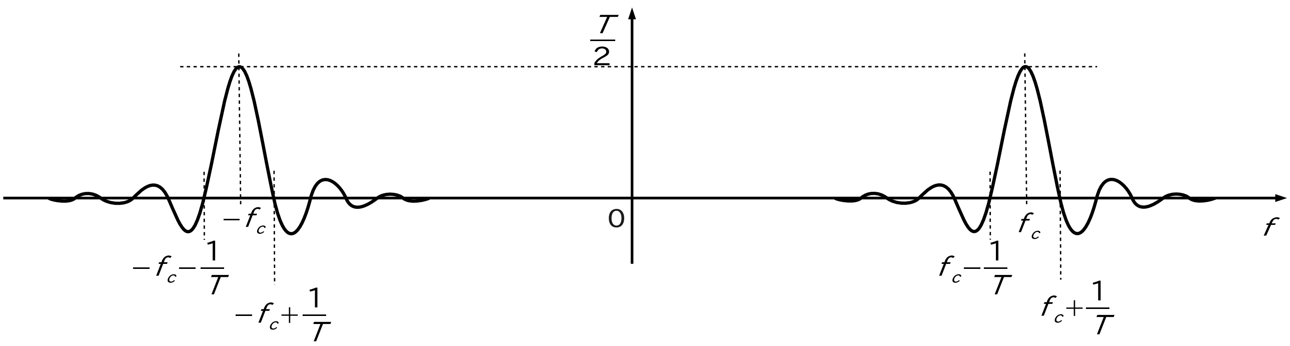
問３．

まず，$g(t)$ のフーリエ変換を $G(f)$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
G(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi i f t}dt \\
&= \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{e^{2\pi i f_c t} + e^{2\pi i f_c t}}{2} e^{-2\pi i f t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(e^{-2\pi i(f-f_c)t} + e^{-2\pi i(f+f_c)t}\right)dt \\
&= \left[\frac{e^{-2\pi i(f-f_c)t}}{-4\pi i(f-f_c)} + \frac{e^{-2\pi i(f+f_c)t}}{-4\pi i(f+f_c)}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{e^{\pi i(f-f_c)T} - e^{-\pi i(f-f_c)T}}{4\pi i(f-f_c)} + \frac{e^{\pi i(f+f_c)T} - e^{-\pi i(f+f_c)T}}{4\pi i(f+f_c)} \\
&= \frac{\sin(\pi(f-f_c)T)}{2\pi(f-f_c)} + \frac{\sin(\pi(f+f_c)T)}{2\pi(f+f_c)} \\
&= \frac{T}{2}\mathrm{sinc}(\pi(f-f_c)T) + \frac{T}{2}\mathrm{sinc}(\pi(f+f_c)T)
\end{aligned}
$$

となる。

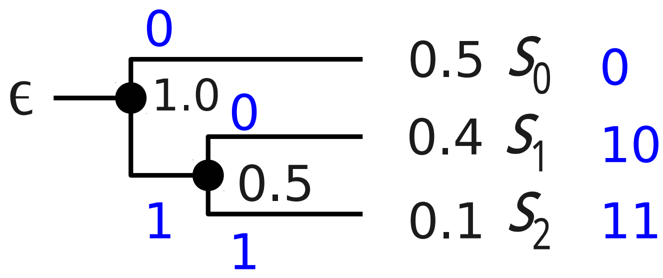
従って，フーリエ変換は下図のように $f = f_c$ と $f = -f_c$ を中心とした sinc 関数となり，実際の信号の周波数を考えれば，$f_c - 1/T$ から $f_c + 1/T$ までが信号の主要な周波数成分となる。



問４．

(a)

下図のように，s_1，s_2，s_3 に，それぞれ，0，10, 11 を割り振ればよい。

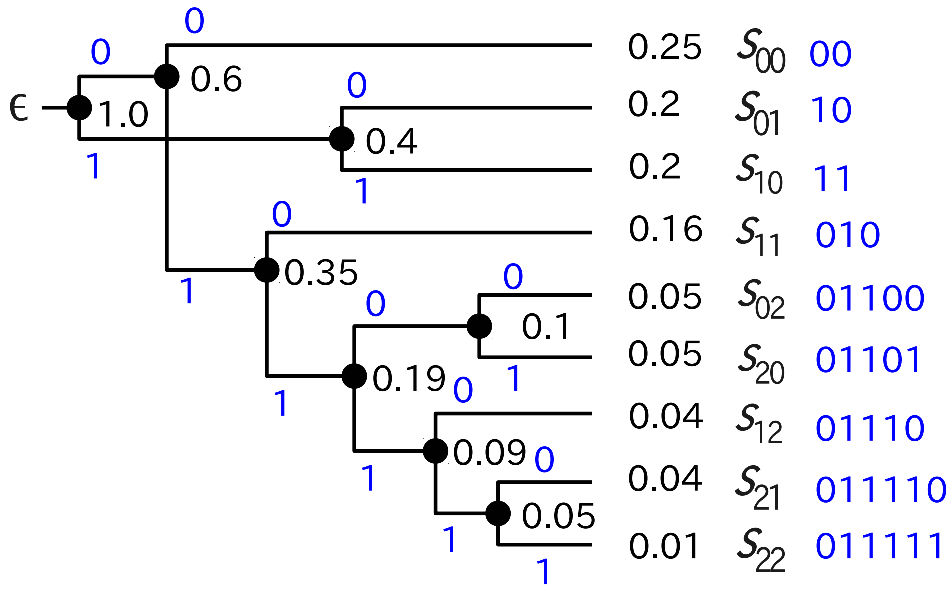


(b) この平均符号長は以下のように求まる。

$$0.5 \times 1 + 0.4 \times 2 + 0.1 \times 2 = 1.5$$

(c)

拡大情報源のシンボル s_{ij} の出現確率 p_{ij} は，$p_{00} = 0.25$，$p_{01} = 0.2$，$p_{02} = 0.05$，$p_{10} = 0.2$，$p_{11} = 0.16$，$p_{12} = 0.04$，$p_{20} = 0.05$，$p_{21} = 0.04$，$p_{22} = 0.01$ となるので，ハフマン符号は下図のようになる (シンボルの順番は入れ替えている)。



(d) この平均符号長は以下のように求まる。

$$0.25 \times 2 + 0.2 \times 2 + 0.05 \times 5 + 0.2 \times 2 + 0.16 \times 3 + 0.04 \times 5 + 0.05 \times 5 + 0.04 \times 6 + 0.01 \times 6 = 2.78$$

(e)

拡大情報源 $\mathcal{S}^2$ を使うと，$\mathcal{S}$ のシンボルあたりの符号長は，平均で $2.78/2 = 1.39$ bit となる。これは，$\mathcal{S}$ を直接ハフマン符号化した場合の，1.5 bit よりも小さく，少ないデータ量で符号化することができる。$\mathcal{S}$ のエントロピーが，約 1.3621 bit であるので，**シャノンの情報源符号化定理**より，さらに情報源を拡大すれば，エントロピーに近い値のデータ量で符号化することができる。