

問 1 . 本講義の内容に関して、次の文章 (表) の空欄 (a) ~ (y) を埋めよ。

- デジタル変調方式において、搬送波の周波数を変化させる方式は、アルファベット 3 文字で (a) 方式と呼ばれる。また、(b) QAM は搬送波の (c) と (d) を変化させ、1 つのシンボルで 4bit の情報を送ることができる。
- 電波が複数の経路を通る (e) によって生じるフェージングによって、受信側では (f) という現象が生じる。
- W-CDMA や Bluetooth に使われている (g) 通信方式は、伝送したい信号の周波数帯域より広い周波数帯域を使って伝送する。その中で、W-CDMA は (h) 方式を、Bluetooth は (i) 方式を使っている。前者は (j) ことによって周波数帯域を広げている。
- 2 値 (0 or 1) の信号列で、値が変化する時刻が T の整数倍である信号を BPSK で送るときに必要な周波数帯域はおよそ (k) である。このもとの信号を N チャンネルに分割すると、分割された信号を送るために必要な周波数帯域は (l) となる。このとき、OFDM(直交周波数分割多重方式) では、サブキャリアの周波数間隔を $1/(NT)$ とすることができるので、 N チャンネルすべてを送るために必要な周波数帯域はおよそ (m) となり、周波数帯域の利用効率はシングルキャリアのおよそ (n) 倍になる。
- 情報源 S のシンボル s_1, s_2, s_3, s_4 を、2 元符号で下の表のように符号化した。空欄に該当する場合は $\circ$ 、該当しない場合は $\times$ を記入せよ。

符号語	一意復号可能		瞬時復号可能	
'00', '01', '011', '111'	(o)		(p)	
'00', '01', '10', '11'	(q)		(r)	
'00', '001', '100', '111'	(s)		(t)	
'0', '10', '110', '1110'	(u)		(v)	

- n 個の r 元符号の符号長を l_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とするとき、クラメル不等式は (w) と表される。
- 通信路符号化定理によって、誤りが生じる 2 元対称通信路で、(x) が (y) よりも小さければ、いくらでも誤り率を下げるができる符号が存在することが示されている。

問 2 . 通信路 Γ に入力するシンボルを a_i ($i = 1, 2, \dots, s$), Γ が出力するシンボル b_j ($j = 1, 2, \dots, r$) とする。両者を表す確率変数を、それぞれ A, B とする。 a_i が入力される確率 $P(A = a_i)$ を p_i で表す。また、 a_i が入力されたとき出力が b_j である条件付き確率を $P_{ij} = P(B = b_j | A = a_i)$ で表す。次の値を、確率を表すものとしては p_i, P_{ij} だけを使って表しなさい ($\log$ の底は規定しなくても良い)。

- 1) a_i と b_j の同時 (結合) 確率
- 2) b_j の出現確率
- 3) b_j が出力されとき入力が a_i である条件付き確率 $P(A = a_i | B = b_j)$
- 4) 入力を情報源としたときの情報源のエントロピー
- 5) 出力が与えられるときの入力の条件付きエントロピー
- 6) 入力と出力の相互情報量
- 7) 通信容量 (チャンネルキャパシティ)

なお、 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の $x_1, x_2, \dots, x_n$ を動かしたときの最大値を、 $\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ で表すものとする。 (p_i, P_{ij}) だけで表せない場合は、適当な確率を定義して式を記しても、70%程度加点する。)

問3 . 時間信号 $g(t)$ をフーリエ変換したものを $G(f)$ とする。いま, W を正の定数として, $|f| \geq W$ のとき, $G(f) = 0$ であるものとする。標本化定理を $g(t)$ を例とした式を用いて説明せよ (証明する必要はない)。また, この定理をもとにしている応用例を述べよ。

問4 . 情報源 S の3のシンボル s_0, s_1, s_2 に対する, 出現確率が $p_0 = 0.6, p_1 = 0.3, p_2 = 0.1$ であるものとする。このとき以下の問いに答えよ。

(a) S のハフマン符号を求めよ (作成するときの図を示すこと)。

(b) (a) で求めた符号の平均符号長を求めよ。

(c) 拡大情報源 S^2 (s_i と s_j を組み合わせたシンボルを s_{ij} で表す) に対するハフマン符号を求めよ (図を示すこと)。

(d) (c) で求めた符号の平均符号長 (値は 2.67) を求める式を記せ。

(e) S のエントロピーは, 約 1.2955 [bit] となる。(b), (d) で求めた値との関係を論ぜよ (適切な定理を用いて論じること)。

解答用紙

学科・類：

学籍番号：

名前：

問 1 .

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)

(i)

(j)

(k)

(l)

(m)

(n)

(o)

(p)

(q)

(r)

(s)

(t)

(u)

(v)

(w)

(x)

(y)

問2 .

問3 .

問 4 .

学科・類：

学籍番号：

名前：

問 1 .

(a) FSK

(b) 16

(c) 振幅

(d) 位相

(e) マルチパス

(f) 場所や時間によって受信電力が変化する

(g) スペクトル拡散

(h) 直接拡散方式

(i) 周波数ホッピング

(j) 例えば，ランダムに高速に 0/1 が変化する系列と入力との EXOR の結果を，送信する 0/1 系列とする

(k) $2/T$

(l) $2/(NT)$

(m) $(N + 1)/(NT)$

(n) $2N/(N + 1)$

(o) $\circ$ (p) $\times$ (q) $\circ$ (r) $\circ$ (s) $\times$ (t) $\times$ (u) $\circ$ (v) $\circ$

(w) $\sum_{i=1}^n r^{-l_i} \leq 1$

(x) 伝送速度 (伝送レート)

(y) 通信容量

問 2 .

1) 同時確率分布 $R_{ij} = P(A = a_i, B = b_j)$ は , 次のようになる。

$$R_{ij} = p_i P_{ij}$$

2) b_j が出現する確率 $q_j = P(B = b_j)$ は , 次のようになる。

$$q_j = \sum_{k=1}^s R_{kj} = \sum_{k=1}^r p_k P_{kj}$$

3) $Q_{ij} = P(A = a_i | B = b_j)$ は , ベイズの定理から ,

$$Q_{ij} = \frac{P(A = a_i, B = b_j)}{P(B = b_j)} = \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^s p_k P_{kj}}$$

4) 入力情報源のエントロピーは , 次式のようにになる。

$$H(\mathcal{A}) = - \sum_{i=1}^s p_i \log p_i$$

5) 出力が与えられたときの入力の条件付きエントロピーは , 次式のようにになる。

$$\begin{aligned} H(\mathcal{A}|\mathcal{B}) &= \sum_{j=1}^r q_j H(\mathcal{A}|b_j) \\ &= \sum_{j=1}^r q_j \left(- \sum_{i=1}^s P(A = a_i | B = b_j) \log P(A = a_i | B = b_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^s p_k P_{kj} \right) \left(- \sum_{i=1}^s \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^s p_k P_{kj}} \log \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^s p_k P_{kj}} \right) \\ &= - \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^s p_i P_{ij} \log \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^s p_k P_{kj}} \end{aligned}$$

6) 相互情報量は , $I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) - H(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ であるから , 次式のようにになる。

$$I(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = - \sum_{i=1}^s p_i \log p_i + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^s p_i P_{ij} \log \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^s p_k P_{kj}}$$

7) チャンネルキャパシティは , p_i を変化させたときの , 相互情報量の最大値であるから , 次式が成立する。

$$\max_{p_1, p_2, \dots, p_r} \left[- \sum_{i=1}^s p_i \log p_i + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^s p_i P_{ij} \log \frac{p_i P_{ij}}{\sum_{k=1}^s p_k P_{kj}} \right]$$

問 3 .

信号が周波数 W で帯域制限されている。周期 T ($< 1/(2W)$) で信号を標本化した値は, $g(nT)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) となる。この標本値から,

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{T} (t - nT) \right)$$

によって, もとの信号 $g(t)$ を復元することができる。ここで,

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

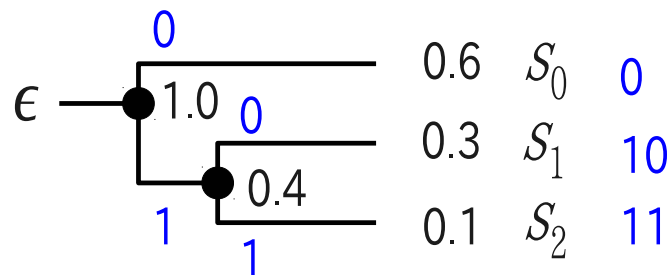
である。

この関係によって, 時間的に離散な信号しか扱うことができないデジタル信号処理で, 連続時間の信号を扱うことを理論的に正当付けている。たとえば, コンパクトディスクでは, 20kHz 以上の周波数は人間の耳に聞こえないため, その 2 倍より少し高い 44.1kHz の周波数でサンプリングを行っている (離散化する前にフィルタで 22kHz 以上の周波数の信号は除いている)。

問 4 .

(a)

下図のように, s_1, s_2, s_3 に, それぞれ, 0, 10, 11 を割り振ればよい。

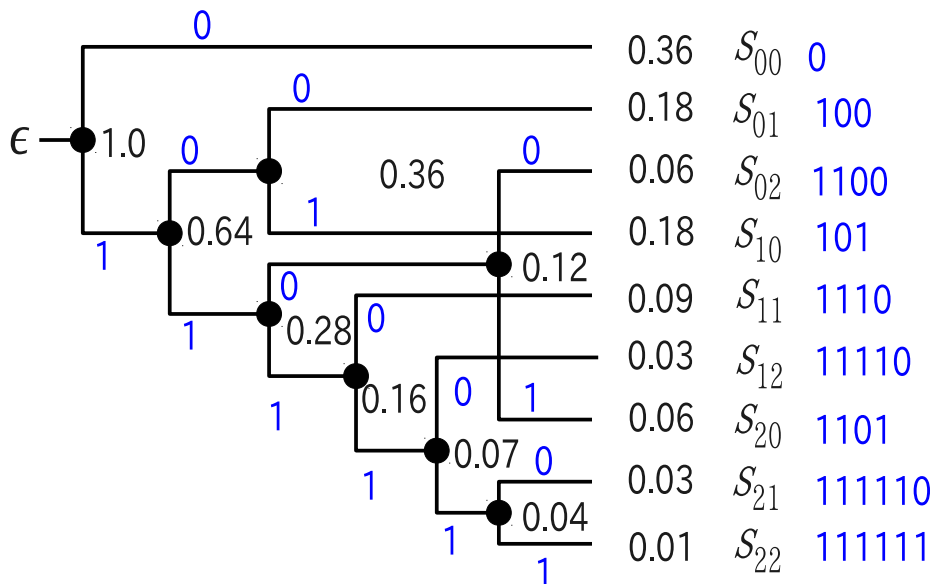


(b) この平均符号長は以下のように求まる。

$$0.6 \times 1 + 0.3 \times 2 + 0.1 \times 2 = 1.4$$

(c)

拡大情報源のシンボル s_{ij} の出現確率 p_{ij} は, $p_{00} = 0.36, p_{01} = 0.18, p_{02} = 0.06, p_{10} = 0.18, p_{11} = 0.09, p_{12} = 0.03, p_{20} = 0.06, p_{21} = 0.03, p_{22} = 0.01$ となるので, ハフマン符号は下図のようになる。



(d) この平均符号長は以下のように求まる。

$$0.36 \times 1 + 0.18 \times 3 + 0.06 \times 4 + 0.18 \times 3 + 0.09 \times 4 + 0.03 \times 5 + 0.06 \times 4 + 0.03 \times 6 + 0.01 \times 6 = 2.67$$

(e)

拡大情報源 S^2 を使うと, S のシンボルあたりの符号長は, 平均で $2.67/2 = 1.335$ [bit] となる。これは, S を直接ハフマン符号化した場合の, 1.4 [bit] よりも小さく, 少ないデータ量で符号化することができる。 S のエントロピーが, 約 1.2955 [bit] であるので, シャノンの情報源符号化定理より, さらに情報源を拡大すれば, エントロピーに近い値のデータ量で符号化することができる。