

・ミスプリント等を指摘してくれた学生にはボーナスポイントを進呈します。

## 1. フーコー振り子

図 1 の球を半径  $R$  の地球とみなし  $z$  軸を自転軸とする．地球の自転の角速度は  $\omega$  である．振り子の運動を地表（すなわち球の表面）で観測する．観測点の北緯は  $\alpha$  (rad) である．図の様に運動座標系  $O-\xi\eta\zeta$  をとる．図 2 のように  $\xi$  軸と  $\zeta$  軸を含む面に  $\zeta$  軸と垂直な  $d$  軸をとり，振り子は  $\zeta$  軸と  $d$  軸を含む破線の面内で振れるとする．その時， $\xi$  軸と  $d$  軸の角度を  $\varphi$  とする．その破線の面を面に垂直な方向から見て書いたのが図 3 である． $O$  は地球の中心で  $\zeta = R$  の位置が地表である．質量  $m$  の重りが長さ  $L$  の糸で点  $P$  よりぶら下げられている．糸に加わる張力を  $T$  とする．重りや糸に対する空気抵抗は無視する． $L \ll R$  であるので，重力加速度は  $g$  で一定とみなせるとする．

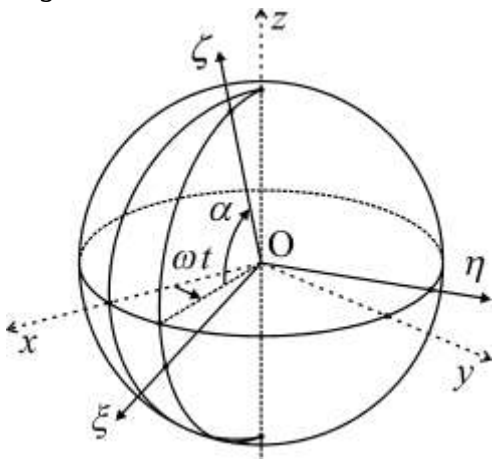


図 1 運動座標系の取り方

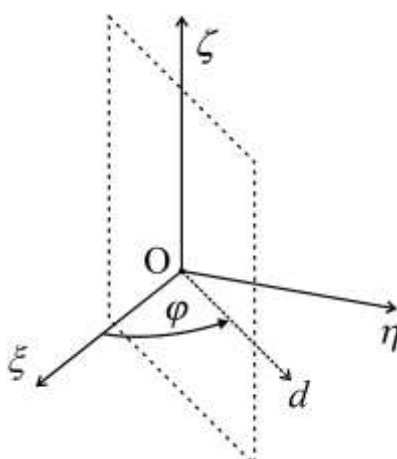


図 2 振子の振れる面の取り方

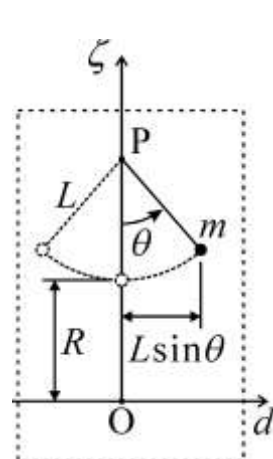


図 3 振り子の振れ方

絶対座標系 ( $O-xyz$  座標系) で記述 (観測) される運動方程式  $\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}}$  はである．これを図 1 のように共通の原点を持つ運動座標系 ( $O-\xi\eta\zeta$  座標系) で記述すると，

$$\mathbf{f}' - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') - 2m(\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\mathbf{r}}') - m(\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r}') = m\ddot{\mathbf{r}}' \quad (0)$$

となる．但し，どちらの座標系も直交座標系とし，絶対座標系で表した位置  $\mathbf{r}$  に対して運動座標系で表した位置は  $\mathbf{r}'$  で表す．他の量も同様に「'」(ダッシュ記号) を用いて表わすこととする．座標変換テンソルは  $\mathbf{R}$  (すなわち， $\mathbf{r} = \mathbf{R}\mathbf{r}'$ ，もしくは， $\mathbf{r}' = \mathbf{R}^T\mathbf{r}$ ) とする．また， $\mathbf{r}$  の時間に関する 1 階微分は  $\dot{\mathbf{r}}$ ，2 階微分は  $\ddot{\mathbf{r}}$  と表すこととする．(特に， $\dot{\mathbf{r}}'$  は「 $\mathbf{r}'$  の時間に関する 1 階微分」を意味する事とし，「運動座標系で表した  $\dot{\mathbf{r}}$ 」を意味しないことに注意せよ.)

質点に加わる力は糸による張力と重力であるので，

$$\mathbf{f}' = \begin{pmatrix} -T \sin \theta \cos \varphi \\ -T \sin \theta \sin \varphi \\ T \cos \theta - mg \end{pmatrix}. \text{ また, } \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \text{ なので } \boldsymbol{\omega}' = \omega \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \text{ である. } \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \text{ と表して,}$$

式(0)に代入すれば解くべき方程式が得られる．

## 2. フーコー振り子に対する厳密な方程式

従って，北緯は  $\alpha$  (rad) で振れる振り子のおもりに対する厳密な運動方程式は

$$\begin{pmatrix} -T \sin \theta \cos \varphi \\ -T \sin \theta \sin \varphi \\ T \cos \theta - mg \end{pmatrix} + m\omega^2 \begin{pmatrix} \xi \sin^2 \alpha + \zeta \sin \alpha \cos \alpha \\ \eta \\ \xi \sin \alpha \cos \alpha + \zeta \cos^2 \alpha \end{pmatrix} - 2m\omega \begin{pmatrix} -\dot{\eta} \sin \alpha \\ \dot{\xi} \sin \alpha + \dot{\zeta} \cos \alpha \\ -\dot{\eta} \cos \alpha \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} \quad (1)$$

である。ここで、 $\xi, \eta, \zeta$  は、

$$\xi = L \sin \theta \cos \varphi \quad (2)$$

$$\dot{\xi} = L(\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) \quad (2)'$$

$$\ddot{\xi} = L(\ddot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \varphi - \ddot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi - L(\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \varphi) \quad (2)''$$

$$\eta = L \sin \theta \sin \varphi \quad (3)$$

$$\dot{\eta} = L(\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) \quad (3)'$$

$$\ddot{\eta} = L(\ddot{\theta} \cos \theta \sin \varphi - \dot{\theta}^2 \sin \theta \sin \varphi + \ddot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi + L(\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \sin \varphi) \quad (3)''$$

$$\zeta = R + L - L \cos \theta \quad (4)$$

$$\dot{\zeta} = L \dot{\theta} \sin \theta \quad (4)'$$

$$\ddot{\zeta} = L \ddot{\theta} \sin \theta + L \dot{\theta}^2 \cos \theta = L(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \quad (4)''$$

と表すことができる。式(1)に式(2)~(4)を代入した式において、変数は、 $\theta$ 、 $\varphi$ 、および $T$ の3つ、方程式は3つ。これらの連立方程式を解くことが出来れば、北緯は $\alpha$  (rad)の地上で振れるの振り子の運動を知る事が出来る。しかし、残念ながら…この方程式に対する厳密な解析解を得ることは難しい。そこで、いくつかの仮定を導入し、方程式を解ける形に変形できないか、考察してみよう。

### 3. 仮定の導入による方程式の単純化

ここで我々が知りたいのは、主に、 $\varphi$ の変化である。そこで、

仮定1：

遠心力の項を無視する。

地球の自転による遠心力は、重力加速度の方向を少しずらすだけなので、我々の主に知りたい $\varphi$ の変化に対して、影響がないのではないかと、言う期待である。糸の長さが地球の半径に近い場合は、何がおこるかわからないが、今は、 $L \ll R$ であるので、遠心力の項は、主に地球の半径で決まる。すなわち、

$$m\omega^2 \begin{pmatrix} \xi \sin^2 \alpha + \zeta \sin \alpha \cos \alpha \\ \eta \\ \xi \sin \alpha \cos \alpha + \zeta \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \approx m\omega^2 R \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 \\ \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

となる、 $\alpha$ も $\omega$ も変化しないので、運動座標系において同じ方向に力が加わり続けることになる。それでは一様な重力場と同様に、振り子の振れる方向を変えることはできない。であれば、遠心力の項を無視してみよう…と言う発想である。

遠心力を無視すると、先述の方程式(1)は、

$$\begin{pmatrix} -T \sin \theta \cos \varphi \\ -T \sin \theta \sin \varphi \\ T \cos \theta - mg \end{pmatrix} - 2m\omega \begin{pmatrix} -\dot{\eta} \sin \alpha \\ \dot{\xi} \sin \alpha + \dot{\zeta} \cos \alpha \\ -\dot{\eta} \cos \alpha \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix}$$

と表せる。さらに、振り子の振幅が十分に小さい為に、

仮定2：

糸の長さに対し振子の振れ幅は小さいとして、  
 $\sin \theta = \theta$  および  $\cos \theta = 1$  と近似できると仮定する。

( $\theta$  が十分に小さい時の近似であることに注意しよう。)

すると、式(1)は

$$\begin{aligned}
& -T\theta \cos \varphi + 2m\omega \dot{\eta} \sin \alpha = m\ddot{\xi} \\
& -T\theta \sin \varphi - 2m\omega(\dot{\xi} \sin \alpha + \dot{\zeta} \cos \alpha) = m\ddot{\eta}
\end{aligned} \tag{1a}$$

$$T - mg + 2m\omega \dot{\eta} \cos \alpha = m\ddot{\zeta}$$

式(2)~(4)は,

$$\xi = L\theta \cos \varphi \tag{2a}$$

$$\dot{\xi} = L(\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \theta \sin \varphi) \tag{2a}'$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} &= L(\ddot{\theta} \cos \varphi - \dot{\theta}^2 \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi) - L(\ddot{\varphi} \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \theta \cos \varphi) \\
&= L\{(\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 \theta - \dot{\varphi}^2 \theta) \cos \varphi - (2\dot{\theta} \dot{\varphi} + \ddot{\varphi} \theta) \sin \varphi\}
\end{aligned} \tag{2a}''$$

$$\eta = L\theta \sin \varphi \tag{3a}$$

$$\dot{\eta} = L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \tag{3a}'$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\eta} &= L(\ddot{\theta} \sin \varphi + \dot{\theta}^2 \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi) + L(\ddot{\varphi} \theta \cos \varphi + \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \theta \sin \varphi) \\
&= L\{(2\dot{\theta} \dot{\varphi} + \ddot{\varphi} \theta) \cos \varphi + (\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 \theta - \dot{\varphi}^2 \theta) \sin \varphi\}
\end{aligned} \tag{3a}''$$

$$\zeta = R \tag{4a}$$

$$\dot{\zeta} = L\dot{\theta} \tag{4a}'$$

$$\ddot{\zeta} = L(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2) \tag{4a}''$$

と表せる. ここで注意すべき点がある. 例えば, 式(4a)を微分しても式(4a)'や(4a)''にはならない. 同様に, 式(2a)''は式(2a)を2回微分した式とは異なる. 変数 $\theta$ が小さくて無視できても, その変化率 $\dot{\theta}$ は無視できるとは限らないからである. 参考書等で式(4a)を微分した式を用いているものもあるが, 注意が必要である. **ここでは導入した仮定を明確にしながら, 慎重に考察していく.** 式(1a)の $\xi$ 成分に注目すると,

$T = mg - 2m\omega \dot{\eta} \cos \alpha + m\ddot{\zeta}$  が得られ,  $T$  が消去できる. これを式(1a)の $\xi$ ,  $\eta$ 成分の式に代入すると,

$$\begin{aligned}
& -(mg - 2m\omega \dot{\eta} \cos \alpha + m\ddot{\zeta})\theta \cos \varphi + 2m\omega \dot{\eta} \sin \alpha = m\ddot{\xi} \\
& -(mg - 2m\omega \dot{\eta} \cos \alpha + m\ddot{\zeta})\theta \sin \varphi - 2m\omega(\dot{\xi} \sin \alpha + \dot{\zeta} \cos \alpha) = m\ddot{\eta}
\end{aligned}$$

が得られる. 両辺を比較すると, おもりの質量 $m$ は関係なくなることが分かり,

$$\begin{aligned}
& -(g - 2\omega \dot{\eta} \cos \alpha + \ddot{\zeta})\theta \cos \varphi + 2\omega \dot{\eta} \sin \alpha = \ddot{\xi} \\
& -(g - 2\omega \dot{\eta} \cos \alpha + \ddot{\zeta})\theta \sin \varphi - 2\omega(\dot{\xi} \sin \alpha + \dot{\zeta} \cos \alpha) = \ddot{\eta}
\end{aligned}$$

が得られる. これらに式(2a)~(4a)を代入するのだが, 慎重に代入していこう. 先ずは式(3a)を代入して

$$\begin{aligned}
& -(g - 2\omega L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \cos \alpha + \ddot{\zeta})\theta \cos \varphi + 2\omega L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \sin \alpha = \ddot{\xi} \\
& -(g - 2\omega L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \cos \alpha + \ddot{\zeta})\theta \sin \varphi - 2\omega(\dot{\xi} \sin \alpha + \dot{\zeta} \cos \alpha) = \ddot{\eta}
\end{aligned}$$

次に式(4a)''を代入して,

$$\begin{aligned}
& -(g - 2\omega L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \cos \alpha + L(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2))\theta \cos \varphi + 2\omega L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \sin \alpha = \ddot{\xi} \\
& -(g - 2\omega L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \cos \alpha + L(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2))\theta \sin \varphi - 2\omega(\dot{\xi} \sin \alpha + \dot{\zeta} \cos \alpha) = \ddot{\eta}
\end{aligned}$$

次に式(4a)'と(2a)'を代入して,

$$\begin{aligned}
& -(g - 2\omega L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \cos \alpha + L(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2))\theta \cos \varphi + 2\omega L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \sin \alpha = \ddot{\xi} \\
& -(g - 2\omega L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \cos \alpha + L(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2))\theta \sin \varphi - 2\omega(L(\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \theta \sin \varphi) \sin \alpha + L\dot{\theta} \cos \alpha) = \ddot{\eta}
\end{aligned}$$

最後に式(2a)''と(3a)''を代入して,

$$\begin{aligned}
& -(g - 2\omega L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \cos \alpha + L(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2))\theta \cos \varphi + 2\omega L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \sin \alpha \\
& = L\{(\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 \theta - \dot{\varphi}^2 \theta) \cos \varphi - (2\dot{\theta} \dot{\varphi} + \ddot{\varphi} \theta) \sin \varphi\} \\
& -(g - 2\omega L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \cos \alpha + L(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2))\theta \sin \varphi - 2\omega(L(\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \theta \sin \varphi) \sin \alpha + L\dot{\theta} \cos \alpha) \\
& = L\{2\dot{\theta} \dot{\varphi} + \ddot{\varphi} \theta \cos \varphi + (\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 \theta - \dot{\varphi}^2 \theta) \sin \varphi\}
\end{aligned}$$

これらの式のうち, 先ず,  $\xi$ 成分の式を整理すると,,,

$$\begin{aligned}
& -(g - 2\omega L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \cos \alpha + L(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2))\theta \cos \varphi + 2\omega L(\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \theta \cos \varphi) \sin \alpha \\
& = L\{(\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 \theta - \dot{\varphi}^2 \theta) \cos \varphi - (2\dot{\theta} \dot{\varphi} + \ddot{\varphi} \theta) \sin \varphi\}
\end{aligned}$$



ここまでの仮定では、(1ξ)と(1η)が我々の解くべき方程式である。Tは消去されたので、変数はθとφの2つとなった。2つの方程式を連立させて解く事が出来れば良いのだが…。残念ながらここまで単純化しても未だこれらの方程式は解けそうにない。

仮定3：

$\ddot{\theta}\theta, \dot{\phi}^2\theta, \omega\dot{\phi}\theta, \omega\ddot{\theta}\theta$  (3次の項) と  $\omega\dot{\phi}\theta^2$  (4次の項) は無視できると仮定してみよう

θだけでなく、 $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\omega$ もそれほど大きくないとすると、その高次の項は1次の項に対して無視できるほど小さい。2次の項も小さいはずだが、慎重を期して、まず3次以上の項だけ無視してみるのである。この仮定は $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\omega$ が大きい場合に成り立たないことに注意しよう。例えば、振幅は小さくても高速振動する場合は無視できない。この仮定を導入すると、

$$\text{式(1\xi)は, } (-g\theta - L\ddot{\theta})\cos\varphi + L(2\omega\dot{\theta}\sin\alpha + 2\dot{\theta}\dot{\phi} + \ddot{\phi}\theta)\sin\varphi = 0$$

$$\text{式(1\eta)は } (-g\theta - L\ddot{\theta})\sin\varphi - L(2\omega\dot{\theta}\sin\alpha + 2\dot{\theta}\dot{\phi} + \ddot{\phi}\theta)\cos\varphi = 0$$

$$\text{両式の2乗和をとると, } (-g\theta - L\ddot{\theta})^2 + L^2(2\omega\dot{\theta}\sin\alpha + 2\dot{\theta}\dot{\phi} + \ddot{\phi}\theta)^2 = 0$$

2乗和がゼロになるので、上式の0内はどちらもゼロでなければならない。したがって、

$$-g\theta - L\ddot{\theta} = 0 \quad \star 1$$

$$2\omega\dot{\theta}\sin\alpha + 2\dot{\theta}\dot{\phi} + \ddot{\phi}\theta = 0 \quad \star 2$$

が得られる。☆1は単振動の方程式である。

仮定4：

$\ddot{\phi}\theta$ の項は無視できるとする。

これは2次の項ではあるが、我々が地上で観測するφやその変化速度 $\dot{\phi}$ は非常に遅く、 $\dot{\phi}$ の変化率 $\ddot{\phi}$ はさらに小さいので無視しようという発想である。経験に基づいた仮定であることに注意しよう。

$$\star 1 \text{ より } L\ddot{\theta} + g\theta = 0 \quad \star 1$$

$$\star 2 \text{ より } \dot{\phi} = -\omega\sin\alpha \quad \star 2$$

が得られた。これでやっと解く事ができる。

#### 4. 単純化した近似方程式に対する考察

##### 4.1 振り子の振動

式★1は単振動の方程式、つまり単純な振り子の方程式である。解は

$$\theta = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \beta\right). \quad (\text{但し, } \theta_0 \text{ と } \beta \text{ は任意の定数.})$$

と書ける。

##### 4.2 振り子の振れる方向の変化

式★2より、振り子の振れ方向の変化がわかる。

$$\alpha = \pi/2, \quad \text{すなわち北極においては,} \quad \dot{\phi} = -\omega$$

となり、地球の自転と逆方向に振れ方向が変化し、1日で1回転することになる。一方、

$$\alpha = 0, \quad \text{すなわち赤道においては,} \quad \dot{\phi} = 0$$

となり、振れ方向は変化しないことになる。

#### 4.3 用いた仮定について

使用した仮定は非常に重要である。これらの仮定がいつも成立するとは限らない。上記の仮定が正しいかどうかは、地上における現象の観察から得られる知見だったのである。数学（論理学）的には、結果を仮定したら、その結果が得られるのはあたりまえである。しかし、仮定したのは得られた結果の全てではない。最小限の仮定から、振れ方向の変化方向やその大きさの緯度依存性まで導くことができた。このあたりの論理を慎重に記していない参考書で勉強すると、「フーコー振り子の理論は難しい…」という印象を持ってしまう。しかし、落ち着いて考えると実は全く難しくない事を認識して欲しい。論理を明記すると、式と文章が長くなるので、書く方も読む方も面倒になるのではあるが、非常に簡単になる。

#### 5. 最後に

このような考察を行いながら物理に基づき論理を展開することで実際の問題を解決するのが工学であり、理学と大きく異なる点の一つである。したがって、数学や物理はしっかり勉強しておく必要がある。また、昨今の難しい問題を解決できる社会から必要とされる人材になるためには、狭い学問分野に閉じこめるのではなく、幅広い分野の知識をしっかりと理解していく必要がある。身の回りの多くの製品は、運動力学、材料力学、熱力学、流体力学、電磁気学、統計力学、量子力学といった自然科学に基づいて設計されていることを忘れてはならない。

さらに、自然科学は誰もが理解できる論理の積み上げによって作られている事を認識して欲しい。積み上げる物が多くなると、複雑になって面倒な場合はあるが、難しいものは一切ない。それが自然科学なのである。講義等で万一難しく感じる事があれば、それはどこかに論理の飛躍があるからである。習った事を整理して質問すれば必ず解決する。この点を認識して今後の講義を履修してもらいたい。

- ・この資料は高橋の工業力学第二を受講する学生の為に高橋が作成した資料です。
- ・質問は大歓迎です。
- ・ミスプリント等を指摘してくれた学生にはボーナスポイントを進呈します。
- ・誤解しやすい表現やより良い説明方法等、改善点を指摘してくれた学生には、内容に応じてボーナスポイントを進呈します。

連絡先： 高橋邦夫 Tel/Fax:03-5734-3915, 大学内線は 3915  
E-mail:takahak@ide.titech.ac.jp  
<http://www.ide.titech.ac.jp/~KT-lab/>