質点と剛体の静力学と動力学

高橋邦夫

2015 年 11 月 13 日

目 次

はじめに

人は古来より全てを知り未来を知る力を求め続けてきた．その探究活動が自然科学（natural science）である．自然科学における大きな進歩がニュートン（Newton）による運動方程式（equation of motion）の発見である．この発見により，天体の運動も，投げられたリンゴの運動も，全く同じ方程式により予測することができるようになった．この運動方程式こそが森羅万象（universe）を司る法則であり，この世界の真理であると思われたことだろう．

人はその後電子の存在を知った．電子は運動方程式に従って粒子の様に振る舞うと同時に，波としても振る舞う．ニュートンの運動方程式ではその振る舞いを完全には記述できないことが明らかになったとき，世界の真理はまた霞の中に隠されたように思われたことだろう．

自然科学における次の大きな進歩がシュレディンガー（Schrödinger）方程式の発見である．これにより電子などの小さな粒子の波動性も説明できるようになった．これが量子力学（quantum mechanics）である．量子力学以前の力学は古典力学（classical mechanics）とも呼ばれる．これら森羅万象を司る自然法則を普遍的な方程式で表すべく，古典力学と量子力学をつないだのが解析力学である．量子力学の意味づけにおいて行列力学の寄与するところも大きい．

最先端の科学技術のほとんどは，複数の科学技術分野にまたがっている．地球規模に波及する複雑な問題を解決する際にも，限られた分野の知識から最善策を得ることは不可能である．技術は人の獲得した英知すなわち科学を総動員して最適化されるものである．

古典力学は科学の出発点である．弾性力学（theory of elasticity）を始め他の学問につながる部分も多い．本書は古典力学，とくに質点と剛体の力学について要点をまとめたものであるが，他の分野につながる部分はその旨をできるだけ記載しておくようにした．先ず，古典力学の基礎をしっかり理解し，続く様々な分野の幅広い科学的知識を身につけ，人類の未来に貢献できるような人材になってもらいたい．

この原稿は未完成です．
表紙の日付が最終更新日です．
主に，工業力学第２で用いる為に作っています．３章〜5 章より先に完成させる予定です．

誤植等を最初に指摘してくれた学生には成績加点のボーナスがあります．より誤解の少ない表現方法等をアドバイスしてくれた学生にも，内容に応じて成績加点のボーナスがある場合があります．

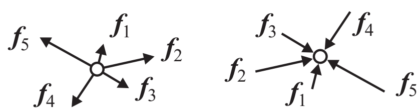
本稿では，使用した定理，その証明，導出過程の補足説明，等々$\cdots$を，この欄外に書きます．本文中の論理を単純にして，本質的な部分を理解しやすくするためです．

第1章　静力学

1.1　質点と剛体

本書の対象とする物体は，質点（point mass）と変形しない剛体（rigid body）である．変形する物体としては，弾性体（elastic body）や流体（fluid）があるが，各々，弾性力学や流体力学の対象である．剛体の大きさが十分に小さい時はそれを質点とみなすことが良い近似となる．運動する物体を対象とする動力学（dynamics）に対し，静力学（statics）は静的状態にある物体を対象とする．

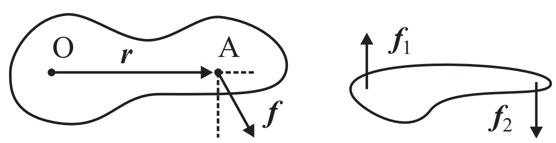
1.2　力とそのつり合い



質点に様々な力（force）が加わる状況を考えよう．力の総和は各力のベクトルの和で表せる．力の和がゼロにならない時，物体は加速度運動を始める．逆に，物体が静止している場合は，物体に働く力の総和はゼロとなっている．この状況を「力がつり合っている」と言う．

力が働く状況を図示する場合，右図の様に，力の作用点を矢印の根本にする流儀と，矢印の先端にする流儀がある．誤解を避けるため，どちらかに統一するのが望ましいが，複雑な図における多くの線の干渉を避けたり，図をコンパクトにまとめたりするため，あえて混在させる場合もある．

1.3　力のモーメント



OA に平行な方向の成分の力は，点 O を移動させるように働くが，点 O の周りに回転させようとはしない．

物体を移動させずに回転させようとするとき，我々は「ねじる」動作をとる．その強さを，力のモーメント（moment of force），もしくはトルク（torque）と呼ぶ．スパナ（レンチ）でボルトを締める様子を想像して欲しい．力のモーメントは力×距離の次元を持つ．

力のモーメント $\boldsymbol{N}$ の大きさ $|\boldsymbol{N}|$ は，$\boldsymbol{N}$ の作用点（O）から力の作用点（A）までの距離と，OA に垂直な方向の成分の力の積である．したがって，与えたい回転に対する $\boldsymbol{N}$ の方向を，右ネジの回転

に対する進行方向と同じにすることで，

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} \tag{1.1}$$

と表される．物体に働く力が釣り合っていても，力のモーメントが釣り合っていない場合，物体は回転する．物体が回転運動しない時，物体に働く力のモーメントの総和はゼロとなっている．この状況を「力のモーメントが釣り合っている」と言う．

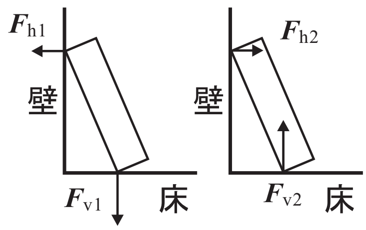
$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}$ は，
大きさ：$|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{f}|\sin\theta$（$\theta$ は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{f}$ のなす角）
方　向：$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{f}$ に垂直な（右ネジ）方向
ベクトル量とすることで，大きさと（回転の）方向が表現されている．

1.4　作用と反作用

接触する物体は相互に力を及ぼしあう．右図のように壁面に物体がたてかけられている時，物体は壁面と床面に力をおよぼす．また壁面と床面は各々同じ大きさの力を物体に及ぼす．このように接触する物体がお互いに相手に力を及ぼす時，接触点においてそれらの力は大きさが同じで向きが逆になる．これを作用・反作用の法則とよぶ．それぞれの力をベクトルを用いて $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ と表すと，この法則は

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}，\text{もしくは，} \boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 \tag{1.2}$$

と表せる．



左図：物体が，壁と床に，加える力
右図：壁と床が，物体に，加える力

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{h1}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{h2}} = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{v1}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{v2}} = \boldsymbol{0}$$

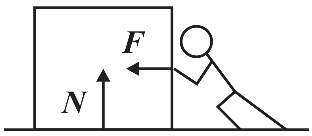
運動方程式を用いれば，個々の物体に働く力や力のモーメントから物体の運動を知ることができる．物体の運動を扱う力学を動力学や運動力学等とよぶ．逆に物体が静止している時の状態を扱う力学を静力学とよぶ．

1.5　トラス構造とラーメン構造

棒状の物体を組み合わせて，構造体を作ることができる．棒状の物体は「はり（梁）」と呼ばれる．はりとはりの結合部において回転の自由度を許容する構造はトラス（truss）構造と呼ばれる．はりの結合部では力が釣り合っている．回転の自由度を許容しない構造はラーメン（rahmen）構造と呼ばれる．ラーメン構造におけるはりの結合部では，力だけでなく力のモーメントも釣り合っている．橋や宇宙ステーション等，実際の設計では，はりの変形も考慮される．弾性変形を考慮した力学は弾性力学と呼ばれ，その中で特にはりの弾性変形を扱うのが「はりの理論（beam theory）」である．

1.6　摩擦

地面に置かれた物体を横（重力加速度方向と垂直な方向）から押し，物体の位置を動かすには仕事が必要である．これは物体と地面の間に摩擦力（frictional force）が働いているからである．摩擦力の原因は，物体と地面の接触表面の凹凸であったり，両者の間に存在する固体や液体であったり，多岐に及ぶ．そのメカニズムを検討し，摺動部の設計に役立てるのがトライボロジー（tribology）と呼ばれる分野の工学である．摩擦力のメカニズムは非常に複雑であるため，簡易的な取扱いとして，摩擦係数が設計に用いられる．横方向からの力が小さいと物体は動かないが，その力を徐々に大きくし，ある力より大きくなった瞬間，物体は動き始める．その瞬間の力 F_{s} は，物体の重さと相関があるハズである．そこで，地面が物体に及ぼす力を N とした時，



$$F_{\mathrm{s}} = \mu_{\mathrm{s}} N \tag{1.3}$$

となる μ_{s} を定義し，これを静止摩擦係数（static coefficient of friction）と呼んでいる．物体が一旦動き出すと，横から加える力は少なくて済んだ経験はあるだろうか？物体が一定速度で動いている時，横方向からの力 F_{d} を

$$F_{\mathrm{d}} = \mu_{\mathrm{d}} N \tag{1.4}$$

と表し， μ_{d} を動摩擦係数（dymanic coefficient of friction）と呼んでいる．

これらの関係はあくまでも近似である．摩擦力がいつも垂直力に厳密に比例するハズがない．しかし，これらの近似は，狭い条件範囲で使うのであれば，悪いものではない．実際に計測した値をフィードバックさせて，摺動部の設計や制御などに用いられている．

トライボロジーにおける永遠の課題と言えるかも知れない．

1.7　分布荷重と集中荷重

力を厳密に１点に加えることは，現実には難しい．物体を構成する原子のサイズは 10^{-10}m のオーダーである．原子１個に力を加えることが出来たとしても，それは集中荷重では無い．剛体の場合，狭い領域に分布荷重が加えられたとしても，それを集中荷重として扱うことが良い近似の１つになる．剛体の広い領域に分布荷重が加えられた場合は，集中荷重と力のモーメントに分解して扱うことが良い近似となる．

剛体は均質な物体である．原子の大きさが無限に小さいとも見なせる．弾性体や流体も同様で，この観点から，これらは全て連続体と呼ばれる．連続体の力学を一般化して統一的に扱うのが連続体力学である．

1.8　仮想仕事の原理

剛体のいくつかの点に力が加えられた状況を想像して欲しい．それらの力は，$\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,,,$ としよう．それらの力によって剛体が少し動いたとする．力が加わった点に仮想的な変位があったとし，各々，$\delta \boldsymbol{x}_1$, $\delta \boldsymbol{x}_2$, $\delta \boldsymbol{x}_3,,,$ としよう．各々の点の変位 $\delta \boldsymbol{x}_i$ は，剛体が変形しないので，相対的な位置を保持するためのある関係を満たしている．その時，

$$\sum \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0} \tag{1.5}$$

が成り立てば，力は釣り合っていると言える．これを仮想仕事の原理（principle of virtual work）とよぶ．

仮想仕事の原理は習慣的に「原理」と呼ばれているが，証明無く成り立つと言う意味の原理では無い．この関係から多くの結果が導かれるのでこう呼ばれるのであろう．この関係の恩恵は，静力学よりも，変形する物体を扱う弾性力学や解析力学において顕著となる．

第2章　質点の動力学

2.1　運動方程式

物質の質量（mass）は，加速し難さの意味で慣性質量 (inertial mass) とも呼ばれる．質量は，重さとは異なり，場に依存しない．質量 m の質点に力 $\boldsymbol{f}$ が加わると，質点は加速される．質点の位置をベクトル $\boldsymbol{r}$ とし，その時間による微分を

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\ \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \tag{2.1}$$

等と表すことにすると，運動方程式は

$$\boldsymbol{f} = m\ddot{\boldsymbol{r}}, \tag{2.2}$$

と表せる．運動量（momentum）を $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$ で定義すると，

$$\boldsymbol{f} = \dot{\boldsymbol{p}} \tag{2.3}$$

と表すこともできる．

ベクトルは，
$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}, \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix},,,$
等の成分を持つとする．これらの時間に関する微分は，
$\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \dot{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} \dot{f_x} \\ \dot{f_y} \\ \dot{f_z} \end{pmatrix}, \dot{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p_x} \\ \dot{p_y} \\ \dot{p_z} \end{pmatrix},,,$
の様に，各成分の微分を成分とするベクトルである．

2.2　運動量保存則と力積

運動方程式を時間で積分すると，微小時間 Δt に対し，

$$\boldsymbol{f}(t)\Delta t = \boldsymbol{p}(t + \Delta t) - \boldsymbol{p}(t) \tag{2.4}$$

が得られる．$\boldsymbol{f}\Delta t$ は力積（impulse）とよぶ．式 (2.4) は，運動量変化が力積に等しいことを意味している．また，力が加えなれなければ，運動量は変化しない，つまり運動量が保存されることを意味している．

式 (2.3) を時間 t から $t + \Delta t$ まで積分すると，
$\int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{f} dt = \boldsymbol{p}(t + \Delta t) - \boldsymbol{p}(t)$
が得られる．左辺は Δt が十分微小であれば,（その間，F は不変として良いので,）式 (2.4) の左辺として良い．

2.3　エネルギー保存則

運動する質点に仕事が加えられた状況を考えよう．加えられた仕事は，次式左辺の積分で得られる．時刻 $t = t_1$ の時，位置は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$, 速

度は $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}_1$ とし，時刻 $t = t_2$ の時，位置は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2$, 速度は $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}_2$ とすると，運動方程式より

$$\int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x} = \frac{1}{2} m {\boldsymbol{v}_2}^2 - \frac{1}{2} m {\boldsymbol{v}_1}^2 \tag{2.5}$$

が得られる．そこで，

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \tag{2.6}$$

を運動エネルギー（kinetic energy）と定義する．式 (2.5) は，外部から加えられた仕事が運動エネルギーの変化に等しいことを意味する．また，外部から仕事を加えられない限り，運動エネルギーは保存することを意味する．

式 (2.5) を導出しよう．位置に関する積分を変数変換し，時間に関する積分にすると
$\int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{f} \cdot \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} dt$
運動方程式を代入すると
$= \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} dt$
但し，ここで，内積の順序交換が可能な性質を用いた．時間に関する積分を変数変換し，速度に関する積分で表すと
$= \int_{t_1}^{t_2} m\boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} dt = \int_{\boldsymbol{v}_1}^{\boldsymbol{v}_2} m\boldsymbol{v} d\boldsymbol{v} = [\frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2]_{\boldsymbol{v}_1}^{\boldsymbol{v}_2}$
これは，式 (2.5) の右辺に等しい．

放物線運動　質量 m のボールを斜め上方向に投げた場合を想像しよう．重力加速度は下向きに g で一定としよう．運動方程式は，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

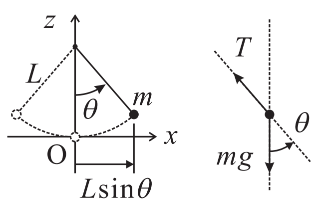
となる．投げる位置は原点，投げる方向を x 方向の斜め上方とすると，その解は，

$$x = v_x t \tag{2.8}$$
$$y = 0 \tag{2.9}$$
$$z = v_z t - gt^2/2 \tag{2.10}$$

となる．式 (2.8) と式 (2.10) より，時間を消去して質点の軌跡を求めると，z が x の 2 次関数となる．これが，2 次関数を放物線とよぶ理由である．質点は放物線を描いて飛ぶ．

初期条件を $t = 0$ のとき，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$ とすると，
$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2$
左の場合，式 (2.8) と式 (2.10) から t を消去すると，$z = -\frac{g}{2v_x^2} x^2 + \frac{v_z}{v_x} x$ のように 2 次関数になる．

振り子　右図のような振り子（pendulum）を想像しよう．糸の質量や空気抵抗は無視する．質点の質量 m，糸に働く張力は T とすると，質点の位置とそれに働く力は，



$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} L\sin\theta \\ 0 \\ L - L\cos\theta \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -T\sin\theta \\ 0 \\ T\cos\theta - mg \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

となる．T と θ が時間の関数であることに注意して，運動方程式 $\boldsymbol{f} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ に代入すると，

$$-g\sin\theta = L\ddot{\theta} \tag{2.12}$$

が得られる．これを厳密に解くことは骨が折れるが，$\theta \simeq 0$ であれば，$\sin\theta \simeq \theta$ なので，

$$-g\theta = L\ddot{\theta} \tag{2.13}$$

と近似できる．これは単振動の方程式であり，解は

$$\theta = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \alpha\right) \tag{2.14}$$

となる．ここで，A と α は任意の定数である．例えば，初期位置と初期速度を決めると決まる．

単振動：変位に対してそれを戻す方向に，変位に比例する力が働くとき，運動方程式は，$-k\boldsymbol{r} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ となる．これは単振動の方程式と呼ばれ，解は各成分が独立に式 (2.14) のようにあらわせる．バネでつるした物体の振動等も単振動である．

惑星や彗星の運動　質量をもつ天体や電荷をもつ粒子の運動の場合は，距離の 2 乗に反比例する力が働く．運動方程式の解から得られる質点の軌道は，円錐曲線と呼ばれる関数群で表される．興味のある諸君は付録を参照してもらいたい．

第3章　運動座標系から見た質点の運動

3.1　運動座標系から見た運動

前章までの話では，動かない原点と座標軸を基準にしていた．当然，座標軸やその原点が動くと，前章の運動方程式は正しいとは限らなくなる．我々は地球上に居るが，地表に原点をとって記述した運動方程式を信じて良いのだろうか？さらに，地球は自転しているし，地球は太陽の周りを公転しており，太陽系自体銀河系の中で回転運動している．ゆっくりとした運動であれば，その影響は無視できるのかも知れない．しかし，どのような運動であれば，どの程度無視できるのだろうか？

動かない座標は絶対座標と呼ばれる．それに対して相対運動する座標は運動座標や相対座標と呼ばれる．絶対座標系で表された位置 $\boldsymbol{r}$ を，運動座標系では，$\boldsymbol{r}'$ 等と，$'$（プライム）を付けて表すこととする．

運動座標系からみた位置ベクトル等は，

$\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{pmatrix}$,,,

のように表す．

3.2　並進運動座標系からみた運動方程式

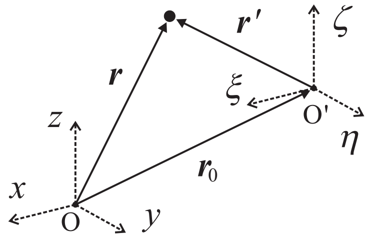
運動座標が並進運動する場合から考えよう．右図の様に，ξ, η, ζ 軸が，各々，x, y, z 軸と平行関係を保ちながら運動する場合，

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}' \tag{3.1}$$

と表すことができる．これを運動方程式 (2.2) に代入すると運動座標系からみた運動方程式が得られる．物体に加わる力は，方向とその大きさにしか意味が無いので，絶対座標系で表しても並進運動座標系で表しても同じ，つまり，$\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{f}$ で良いだろう．$\boldsymbol{v}_0 = \dot{\boldsymbol{r}}_0$ とすると，

$$\boldsymbol{f}' - m\dot{\boldsymbol{v}}_0 = m\ddot{\boldsymbol{r}}' \tag{3.2}$$

が得られる．従って，運動座標系で運動を観察すると，式 (3.2) の左辺第 2 項の分だけ余分の力が働いている様に見えるハズである．この項を慣性力とよぶ．



式 (3.1) のような表現を見たら，

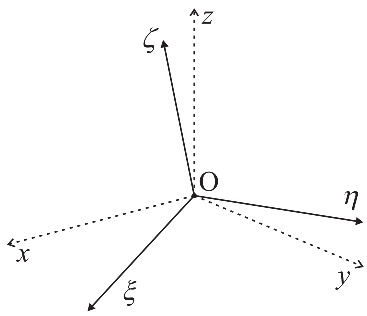
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$

と書かれているとイメージして読んで欲しい．

一定速度で直進する電車の中から物体の運動を見た時の様に，$\boldsymbol{v}_0$ が一定である時，慣性力は観察されない．しかし，電車が動き出す時の様に，$\boldsymbol{v}_0$ が変化する時，慣性力は観察されることがわかる．

3.3　回転運動座標系からみた運動方程式

次に，運動座標が回転運動する場合を考えよう．先ず，運動座標系の原点は絶対座標系と同じとしよう．絶対座標系から見た質点の位置 $\boldsymbol{r}$ は運動座標系から見た質点の位置 $\boldsymbol{r}'$ と座標変換テンソル $\boldsymbol{R}$ を用いて，



$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{r}' \tag{3.3}$$

と表せる．$\boldsymbol{R}$ が座標変換テンソルであれば $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ であり，$\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ が反対称テンソルであることが導ける．また，$\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ が反対称テンソルであれば，任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し

$$\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a} \tag{3.4}$$

テンソルに関しては,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} R_{x\xi} & R_{x\eta} & R_{x\zeta} \\ R_{y\xi} & R_{y\eta} & R_{y\zeta} \\ R_{z\xi} & R_{z\eta} & R_{z\zeta} \end{pmatrix},,,$$

等と書かれているとして，読んで欲しい．

となる $\boldsymbol{\omega}$ があることも示される．これらを使うと，

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}' + \dot{\boldsymbol{r}}') \tag{3.5}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{R}\{\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}') + \dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \boldsymbol{r}' + 2\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\boldsymbol{r}}' + \ddot{\boldsymbol{r}}'\} \tag{3.6}$$

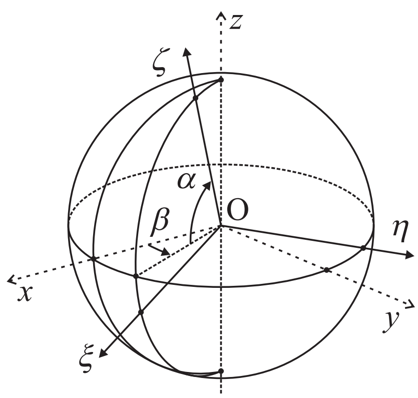
が導ける．従って，回転する運動座標系からみた運動方程式は，

$$\boldsymbol{f}' - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}') - m\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \boldsymbol{r}' - 2m\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\boldsymbol{r}}' = m\ddot{\boldsymbol{r}}' \tag{3.7}$$

と表せる．左辺第 2 項は遠心力（centrifugal force），そして左辺第 4 項はコリオリ力（Coriolis force）と呼ばれる．式 (3.4) の様に，$\boldsymbol{R}$ を与えると $\boldsymbol{\omega}$ が決まり，$\boldsymbol{\omega}$ は座標系の回転の角速度に対応する．

式 (3.7) 左辺第 3 項に特別な名称は無いが，座標系の回転の角加速度に起因する慣性力と言うことになる．

回転の座標変換と運動座標系の角速度　一般の座標変換は右図のように 2 つの角度 α と β で表せる．すなわち，



$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \sin\alpha\cos\beta & -\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\sin\beta & \cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ -\cos\alpha & 0 & \sin\alpha \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

である．α と β は時間の関数としておこう．この $\boldsymbol{R}$ を与えると決まる $\boldsymbol{\omega}$ は，式 (3.4) の関係より，

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}\sin\beta \\ -\dot{\alpha}\cos\beta \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \dot{\beta}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-\dot{\alpha})\begin{pmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

であることが導かれる．$\boldsymbol{\omega}$ を運動座標系で表すと，

$$\boldsymbol{\omega}' = \begin{pmatrix} -\dot{\beta}\cos\alpha \\ -\dot{\alpha} \\ \dot{\beta}\sin\alpha \end{pmatrix} = \dot{\beta}\begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + (-\dot{\alpha})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

と書ける．式 (3.9) と式 (3.10) の右辺第 1 項は z 軸周りの回転の角速度ベクトル，第 2 項は η 軸周りの回転の角速度ベクトルを表している．したがって，$\boldsymbol{\omega}$ や $\boldsymbol{\omega}'$ を求める際には，いちいち $\boldsymbol{R}$ から計算する必要は無く，絶対座標系に対する運動座標系の角速度ベクトルを求めればよい．

地表座標　地表で運動を観察してみよう．地球を完全な球体と見なし，その中心を原点 O とする．z 軸を地球の自転軸にとり，北極方向を正としよう．z 軸に垂直に x 軸をとると，自然に y 軸も決まる．我々は北緯 α(rad) の地表にいるので，右図のように，ζ 軸を真上にとり真南に ξ 軸方向をとろう．但し，原点は地球の中心とする．地球は自転しているので，その角速度を ω とする．但し，α と ω は時間に関して一定である．この座標変換 $\boldsymbol{R}$ に対応する $\boldsymbol{\omega}$ もしくは $\boldsymbol{\omega}'$ は地球の自転の角速度ベクトルなので，

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad ,\text{もしくは，}\quad \boldsymbol{\omega}' = \omega\begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

となる．この結果を式 (3.7) の遠心力項に代入すると，この項は自転軸に垂直な方向のベクトルであることがわかる．また，コリオリ力の方向は，運動座標系から見た速度と自転の角速度ベクトルの両方に垂直な方向に働くこともわかる．これは物体の速度に比例するので，地表で静止しているように見える物体にコリオリ力は働かない．

自由落下　使われなくなった炭鉱の穴を利用して無重力実験が行われる．落下する質量 m の物体の位置と，それに働く力は，

$$\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta \end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

と表せる．地球の半径を R_{E} とすると，落下する物体の位置は $\zeta \simeq R_{\mathrm{E}}$ であるので，重力加速度 g は一定として良いだろう．式 (3.11) を用いて遠心力項およびコリオリ力項を計算すると，各々，

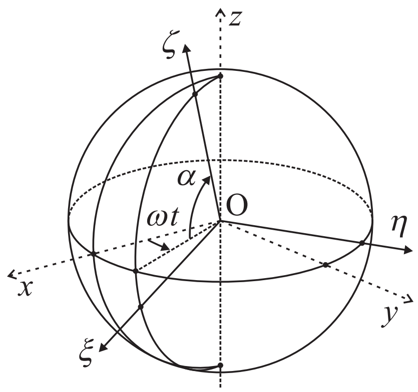
$$-m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}') = m(\zeta\cos\alpha)\omega^2 \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

$\boldsymbol{R}$ より，

$$\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\beta} & -\dot{\alpha}\cos\beta \\ \dot{\beta} & 0 & -\dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\alpha}\cos\beta & \dot{\alpha}\sin\beta & 0 \end{pmatrix}$$

が導かれて，式 (3.4) の関係より，$\boldsymbol{\omega}$が計算できる．

一般に，座標変換 $\boldsymbol{R}$ に対して決まる $\boldsymbol{\omega}$ は，絶対座標系に対する運動座標系の回転運動の角速度ベクトルなのである．



ちなみに，座標変換テンソルは

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \sin\alpha\cos\omega t & -\sin\omega t & \cos\alpha\cos\omega t \\ \sin\alpha\sin\omega t & \cos\omega t & \cos\alpha\sin\omega t \\ -\cos\alpha & 0 & \sin\alpha \end{pmatrix}$$

である．

$$-2m\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\boldsymbol{r}}' = 2m\omega \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\zeta}\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

物体は落下しているので $\dot{\zeta} < 0$ である．したがって，落下軌道は，遠心力によって南方へずれ，コリオリ力によって東方向へずれる．

となる．つまり，落下する物体は，遠心力によって南上方向への力を受け，コリオリ力によって東方向への力を受けることがわかる．

台風の渦　北半球に吹く風を想定しよう．コリオリ力によって，北風は西向き，南風は東向きの力を受ける．また，東風は北下方へ，西風は南上方へ向かう力を受ける．その結果，低気圧の中心に向かって大気が動く際，北半球では反時計まわりに渦を巻きながら大気が流れ込むことになる．南半球では，逆に時計まわりの渦を巻く．

フーコー振り子　コリオリ力の影響を簡単に確認できる実験がフーコー（Foucault）の振り子である．例えば北半球で振り子を揺らしていると，振れ方向が少しずつずれることが観測される．コリオリ力の存在の証明として，必ず，運動力学の題材とされる．その方程式を厳密に解析的に解くことは，恐らく不可能である．しかし，経験に基づいたいくつかの仮定を導入すると，その方程式は簡単に解くことができて，観察結果を見事に表すことができる．詳細を付録に記載したので，是非，考えてみて欲しい．

上野の国立科学博物館には，長さ約 20m のフーコー振り子が常設されている．近所に寄る機会があれば，一度見てみよう．

3.4　並進と回転を含む運動座標系の場合

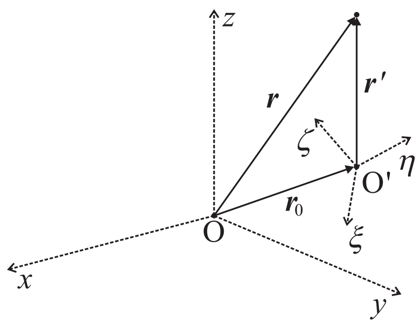
一般的な運動座標系として，先述の並進運動座標系と回転運動座標系を組み合わせよう．右図の様に

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{r}' \tag{3.15}$$

で表される運動座標系を考えよう．3.2 節と同様，位置についてのみ (3.15) で座標変換されるが，力，速度，角速度，等については，$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{f}'$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}'$, 等の様に表す．3.3 節と同様，$\boldsymbol{R}$ に対して決まる $\boldsymbol{\omega}$ を用いると，運動座標系から見た運動方程式は，前節と同様の手続きから，

$$\boldsymbol{f}' - m\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}') - m\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \boldsymbol{r}' - 2m\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\boldsymbol{r}}' \\ -m(\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{v}_0{}' + \dot{\boldsymbol{v}}_0') = m\ddot{\boldsymbol{r}}' \tag{3.16}$$

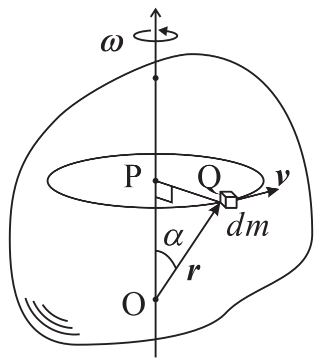
のように得られる．式 (3.7) と比べると，運動座標系の原点の移動速度に依存する項が増えていることがわかる．$-m(\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{v}_0{}' + \dot{\boldsymbol{v}}_0{}')$ の第 1 項はコリオリ力と同じメカニズムに起因する力で，第 2 項は，式 (3.2) の左辺第 2 項と同様，相対加速度に起因する力である．



前節と同様の手続きで計算すると，
$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}' + \dot{\boldsymbol{r}}' + \boldsymbol{v}_0{}')$
$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{R}\{\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}') + \dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \boldsymbol{r}' + 2\boldsymbol{\omega}' \times \dot{\boldsymbol{r}}' + (\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{v}_0{}' + \dot{\boldsymbol{v}}_0') + \ddot{\boldsymbol{r}}'\} \cdots (*)$
となる．式 $(*)$ を運動方程式 $\boldsymbol{f} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ に代入して，式 (3.16) が得られる．

第 4 章　剛体の回転運動

4.1　任意軸周りの回転の運動方程式



　右図の様に剛体が原点 O を通る軸の周りに角速度 ω で回転している．角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の大きさは ω で，方向は回転軸方向でである．回転軸方向に向かって右ねじ方向の回転が正となる．剛体の微小要素に対して運動方程式を考えよう．微小要素の位置を $\boldsymbol{r}$，質量を dm とすると，運動方程式は，

$$d\boldsymbol{f} = \ddot{\boldsymbol{r}}dm \tag{4.1}$$

となる．両辺の左から $\boldsymbol{r}$ を外積として作用させ，剛体全体にわたって足し合わせると，

$$\int_{\mathrm{V}} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{f} = \int_{\mathrm{V}} \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}dm = \int_{\mathrm{V}} \frac{d}{dt}\{\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\}dm \tag{4.2}$$

となる．この式の左辺は，剛体に働く力のモーメントの総和であるので $\boldsymbol{N}$ とおこう．右辺はさらに変形できて，

$$\boldsymbol{N} = \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathrm{V}} \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})dm\right) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}) \tag{4.3}$$

と表せる．但し，

$$\boldsymbol{I} = \int_{\mathrm{V}} \begin{pmatrix} (y^2+z^2) & -xy & -zx \\ -xy & (z^2+x^2) & -yz \\ -zx & -yz & (x^2+y^2) \end{pmatrix} dm \tag{4.4}$$

とした．$\boldsymbol{I}$ は慣性テンソル（inertia tensor）と呼ぶ．運動量のモーメント，すなわち，角運動量（angular momentum）を

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} \tag{4.5}$$

とおくと，式 (4.3) は

$$\boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{L}} \tag{4.6}$$

となる．これが剛体の回転の運動方程式である．

　式 (4.6) は，加えられた力のモーメントが角運動量の時間変化に等しいことを示している．質点の運動方程式 $\boldsymbol{f} = \dot{\boldsymbol{p}}$ において，力は

本書では，ρ を密度，dV を微小体積として，$dm = \rho dV$ の意味で dm を用いる．

微小要素の速度は，$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ である．従って，$\frac{d}{dt}\{\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\} = \frac{d}{dt}\{\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}\} = \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}$ が成り立つ．

$$\int_{\mathrm{V}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} dm = \begin{pmatrix} \int_{\mathrm{V}} a_{11}dm & \int_{\mathrm{V}} a_{12}dm & \int_{\mathrm{V}} a_{13}dm \\ \int_{\mathrm{V}} a_{21}dm & \int_{\mathrm{V}} a_{22}dm & \int_{\mathrm{V}} a_{23}dm \\ \int_{\mathrm{V}} a_{31}dm & \int_{\mathrm{V}} a_{32}dm & \int_{\mathrm{V}} a_{33}dm \end{pmatrix}$$

と表すことにする．

$\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}|^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}$ に

$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，および，$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$

を代入して計算すると，式 (4.3) と式 (4.4) が得られる．

運動量の時間変化に等しいことを思い出そう．また，$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ なので，質量 m は質点の「加速し難さ」の意味をもち，その意味で慣性質量とも呼ばれる．同様に，回転の運動方程式において，$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}$ なので，慣性テンソル$\boldsymbol{I}$は剛体の「回し難さ」を意味する．テンソル量になっているのは，回し難さが方向依存性を持つためである．

また，慣性質量がスカラー量であるのに対し，慣性テンソルはテンソル量である．力のモーメントが加えられることによって発生する角速度の増加分は，必ずしも力のモーメントと同じ方向では無いこともわかる．いびつな形の物体に軸をさしてコマを作り，力のモーメントを加えた時，回転軸が「ブレ」る経験をしたことはないだろうか？

「ブレ」に関しては，4.5 節参照のこと．

4.2　角運動量とその保存則

運動方程式 (4.6) を時間で積分すると，微小時間 Δt に対し，

$$\boldsymbol{N}(t)\Delta t = \boldsymbol{L}(t+\Delta t) - \boldsymbol{L}(t) \tag{4.7}$$

が得られる．$\boldsymbol{N}(t)\Delta t$ は力積のモーメントである．式 (4.7) は，角運動量変化が力積のモーメントに等しいことを意味している．また，力積のモーメントが加えられなければ，角運動量は変化しない，つまり，角運動量が保存されることを意味している．

4.3　運動エネルギー

回転運動する微小要素の運動エネルギーは $dE = \frac{1}{2}dm|\boldsymbol{v}|^2$ で表せるので，これを剛体全体にわたって足し合わせると，

$$E = \int_{\mathrm{V}} dE = \int_{\mathrm{V}} \frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|^2 dm = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{4.8}$$

が得られる．

$$|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|^2 = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} (y^2+z^2) & -xy & -zx \\ -xy & (z^2+x^2) & -yz \\ -zx & -yz & (x^2+y^2) \end{pmatrix}\boldsymbol{\omega}$$

各物理量の次元の確認　質点の運動エネルギーは式 (2.6) すなわち $\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2$ と表せたことを思い出そう．式 (2.6) および式 (4.8) ともに，次元は J（ジュール）である．質点と剛体の衝突等で，エネルギーを受け渡す場合がある．一方，運動量と角運動量は，各々，Ns と Nms であり，異なる物理量である．

4.4　慣性テンソル

運動方程式 (4.6) を導出する際に現れた式 (4.4) を,

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

と置くとき，I_x, I_y, I_z を慣性モーメント (moment of inertia)，I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} を慣性乗積とよぶ．定義からわかるように，**慣性テンソルは座標系の取り方に依存する**．物体の回転とともに慣性テンソルの各成分は変化する可能性があるので，慣性テンソルは時間の関数として扱わないといけない．中心を原点に持つ真球等，特殊な場合のみ，一定値として扱うことができる．

慣性モーメントと慣性乗積に対する平行軸の定理　物体の微小要素の位置 $\boldsymbol{r}$ を原点から質量中心（重心）に向かうベクトル $\boldsymbol{r}_\mathrm{G}$ と質量中心から微小要素に向かうベクトル $\boldsymbol{r}'$ を用いて,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\mathrm{G} + \boldsymbol{r}' \tag{4.10}$$

と表し，物体の総質量を

$$M = \int_\mathrm{V} dm \tag{4.11}$$

とすると，慣性テンソルは,

$$\boldsymbol{I} = M \begin{pmatrix} (y_\mathrm{G}^2 + z_\mathrm{G}^2) & -x_\mathrm{G} y_\mathrm{G} & -z_\mathrm{G} x_\mathrm{G} \\ -x_\mathrm{G} y_\mathrm{G} & (z_\mathrm{G}^2 + x_\mathrm{G}^2) & -y_\mathrm{G} z_\mathrm{G} \\ -z_\mathrm{G} x_\mathrm{G} & -y_\mathrm{G} z_\mathrm{G} & (x_\mathrm{G}^2 + y_\mathrm{G}^2) \end{pmatrix} + \int_\mathrm{V} \begin{pmatrix} (\eta^2 + \zeta^2) & -\xi\eta & -\zeta\xi \\ -\xi\eta & (\zeta^2 + \xi^2) & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi & -\eta\zeta & (\xi^2 + \eta^2) \end{pmatrix} dm \tag{4.12}$$

とも表される．式 (4.12) 右辺第 1 項は，質量中心の位置に質量 M の質点を置いた場合の慣性テンソル，第 2 項は，質量中心の位置に原点があるとして計算した慣性テンソルである．この関係は平行軸の定理と呼ばれる．

第 3.2 章で用いた座標変換と同様に

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\mathrm{G} \\ y_\mathrm{G} \\ z_\mathrm{G} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

とし，慣性テンソルの定義式に代入すると，式 (4.12) が得られる．その際，質量中心の定義：

$\int_\mathrm{V} \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\mathrm{G} dm = \int_\mathrm{V} \boldsymbol{r}' dm = \boldsymbol{0}$ より,

$\int_\mathrm{V} \xi dm = \int_\mathrm{V} \eta dm = \int_\mathrm{V} \zeta dm = 0$ であることを用いる．例えば,,,

$I_z = \int_\mathrm{V} (x^2 + y^2) dm$

$= ({x_\mathrm{G}}^2 + {y_\mathrm{G}}^2) M + \int_\mathrm{V} (\xi^2 + \eta^2) dm.$

その他の項も同様に計算できる．

4.5　慣性主軸と主慣性モーメント

運動方程式 (4.6) と式 (4.5) の関係があるので，慣性乗積がゼロではない物体の場合，力のモーメント $\boldsymbol{N}$ に起因する角速度の変化（角

加速度）$\dot{\boldsymbol{\omega}}$ は，$\boldsymbol{N}$ と平行では無くなる．そのような物体でも，ある方向に $\boldsymbol{N}$ を加えると $\boldsymbol{N}$ と同じ方向の角加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ が発生しないだろうか？そのような特別な方向はないだろうか？

そもそもの違和感は角運動量と角速度が同じ向きにならない点にある．そこで，慣性テンソル $\boldsymbol{I}$ に対し，

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu} = \lambda\boldsymbol{\mu} \tag{4.13}$$

を満たす方向 $\boldsymbol{\mu}$ を調べてみよう．角加速度ベクトルがこの方向を向いておれば，角加速度ベクトルと運動量ベクトルの増加分が同じ方向を向き，少なくともその瞬間は，力のモーメントも同じ方向を向くからである．

式 (4.13) を満たすベクトル $\boldsymbol{\mu}$ とスカラー λ は，テンソル $\boldsymbol{I}$ の固有ベクトル（eigenvector）と固有値（eigenvalue）である．単位テンソル$\boldsymbol{E}$を用いて，$(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{\mu}(\neq\boldsymbol{0})$ が有るとすると，$\det(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{E})=0$ が必要条件となる．これは３次方程式となり，固有単位ベクトルと固有値の組が３つ決められる．それらを

$$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_i, \lambda = I_{\mathrm{p}i}, (i=1\sim 3) \tag{4.14}$$

としておこう．単位ベクトル $\boldsymbol{\mu}_i$ は互いに直交することが導かれる．

これらの固有ベクトルの方向に関しては，式 (4.13) が満たされるので，加えられた力のモーメント $N_{\mathrm{p}i}$ に対して，角加速度 $\dot{\omega}_{\mathrm{p}i}$ は，運動方程式 (4.6) より

$$N_{\mathrm{p}i} = I_{\mathrm{p}i}\dot{\omega}_{\mathrm{p}i} \tag{4.15}$$

の関係が得られる．但し，i は $1\sim 3$ のいずれかの値である．$\boldsymbol{\mu}_i$ 方向の軸を慣性主軸，$I_{\mathrm{p}i}$ を主慣性モーメントと呼ぶ．適切な座標軸を設定し，その１方向のみに力のモーメントが加わる場合，角速度ベクトルなどは全て同じ方向のベクトルとできるので，面倒なテンソルやベクトルを使わずに，スカラー量だけの計算で回転運動を記述することができる．

対角化　慣性主軸の単位ベクトルを用いて，テンソル

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mu_{1x} & \mu_{2x} & \mu_{3x} \\ \mu_{1y} & \mu_{2y} & \mu_{3y} \\ \mu_{1z} & \mu_{2z} & \mu_{3z} \end{pmatrix}, \boldsymbol{I}_{\mathrm{p}} = \begin{pmatrix} I_{\mathrm{p}1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\mathrm{p}2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathrm{p}3} \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

をつくると，$\boldsymbol{P}$ は回転の座標変換テンソルとみなせ，

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \tag{4.17}$$

が成り立つ．式 (4.17) はテンソル $\boldsymbol{I}_{\mathrm{p}}$ を $\boldsymbol{P}$ で座標変換したものが $\boldsymbol{I}$ であることを意味する．テンソル $\boldsymbol{I}$ を $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ で座標変換したものが $\boldsymbol{I}_{\mathrm{p}}$

固有ベクトルと固有値を各々定数倍しても，上の式を満たすので，通常，固有ベクトルは単位ベクトルになるよう決めることができる．

単位テンソルは $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

$\boldsymbol{\mu}_i$ は，$\boldsymbol{\mu}_i=\begin{pmatrix} \mu_{ix} \\ \mu_{iy} \\ \mu_{iz} \end{pmatrix}$ と認識しながら読んで欲しい．

坂を転がる円板や滑車の回転運動の問題等では，円板や滑車に垂直な方向に力のモーメントや角速度をとることができるので，演習問題にしやすいのである．式 (4.15) の導出は対角化を利用すると簡単である．

$\boldsymbol{P}$ は，123-座標系から xyz-座標系への座標変換になる．

$\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu}_1 = I_{\mathrm{p}1}\boldsymbol{\mu}_1$，$\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu}_2 = I_{\mathrm{p}2}\boldsymbol{\mu}_2$，$\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu}_3 = I_{\mathrm{p}3}\boldsymbol{\mu}_3$ より，$\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_{\mathrm{p}}$ が導かれ，式 (4.17) が得られる．

と表現してもよい．$\boldsymbol{I}_{\rm p}(=\boldsymbol{P}^{\rm T}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P})$ は対角化された慣性テンソルと呼ばれる．

ベクトル $\boldsymbol{\mu}_1$，$\boldsymbol{\mu}_2$，$\boldsymbol{\mu}_3$ は，各々，第 1 軸，第 2 軸，第 3 軸方向の単位ベクトルである．当然であるが，これらを $\boldsymbol{P}^{\rm T}$ で座標変換すると，各々，

$$\boldsymbol{P}^{\rm T}\boldsymbol{\mu}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}^{\rm T}\boldsymbol{\mu}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}^{\rm T}\boldsymbol{\mu}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{4.18}$$

となる．

$\boldsymbol{I}$ と同様に，$\boldsymbol{P}^{\rm T}$ で座標変換した $\boldsymbol{N}$ や $\boldsymbol{L}$ を，各々，$\boldsymbol{N}_{\rm p}(=\boldsymbol{P}^{\rm T}\boldsymbol{N})$ や $\boldsymbol{L}_{\rm p}(=\boldsymbol{P}^{\rm T}\boldsymbol{L})$ で表すことにしよう．

運動方程式 $\boldsymbol{N}=\dot{\boldsymbol{L}}$ より，

$$\boldsymbol{N}_{\rm p}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{L}_{\rm p})=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{I}_{\rm p}\boldsymbol{\omega}_{\rm p})=\dot{\boldsymbol{I}}_{\rm p}\boldsymbol{\omega}_{\rm p}+\boldsymbol{I}_{\rm p}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\rm p} \tag{4.19}$$

が得られるが，$\boldsymbol{\omega}$ が $\boldsymbol{\mu}_i$ 方向のとき，$\boldsymbol{I}_{\rm p}$ は，対角成分のみ値 $I_{\rm p1}\sim I_{\rm p3}$ をもち，それ以外は 0 となる．$\boldsymbol{\omega}_{\rm p}$ は第 i 成分のみ値 $\omega_{{\rm p}i}$ をもち，それ以外は 0 となる．さらに，物体がいくら回転しても $\boldsymbol{I}_{\rm p}$ の第 i 行と第 i 列成分は変化しない．したがって，$\dot{\boldsymbol{I}}_{\rm p}\boldsymbol{\omega}_{\rm p}=\boldsymbol{0}$ である．よって，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{\rm p}&=\boldsymbol{I}_{\rm p}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\rm p}\\ N_{{\rm p}i}\boldsymbol{\mu}_i&=I_{{\rm p}i}\dot{\omega}_{{\rm p}i}\boldsymbol{\mu}_i\end{aligned} \tag{4.20}$$

となり，式 (4.15) の関係が証明できた．

本書では，物理的な意味を把握しやすくするため，行列やベクトルの成分をできる限り具体的に表記しているが，テンソルの表記に慣れると，複雑な関係を比較的単純な形式で書くことができる．今後，材料力学等でも使われるので徐々に慣れ親しんでおくことを勧める．

回転運動としての振り子　第 2.3 節で紹介した振り子を思い出そう．糸を固定した位置を回転中心として，1 軸周りの回転運動と考えると，運動方程式は，$N=I\ddot{\theta}$ とも書ける．$N=-mgL\sin\theta$，$I=mL^2$ を代入すると，$-g\sin\theta=L\ddot{\theta}$ となり，第 2.3 節で導いた方程式と同じ式が得られる．回転の運動方程式は質点の運動方程式から導かれるものなので，当然である．

$\boldsymbol{N}_{\rm p}$ の定義に運動方程式 $\boldsymbol{N}=\dot{\boldsymbol{L}}$ を代入すると，
$\boldsymbol{N}_{\rm p}=\boldsymbol{P}^{\rm T}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{P}^{\rm T}\dot{\boldsymbol{L}}=\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{P}^{\rm T}\boldsymbol{L}\right)$
$=\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{P}^{\rm T}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}\right)=\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{P}^{\rm T}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\rm T}\boldsymbol{\omega}\right)$
$=\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\rm p}\boldsymbol{\omega}_{\rm p}\right)$ となる．

$i=3$ の場合を例にとると,,,

$$\boldsymbol{\omega}_{\rm p}=\begin{pmatrix}0\\0\\\omega_{\rm p3}\end{pmatrix}$$

第 3 軸まわりに物体を任意の角度 θ 回転させても $\boldsymbol{I}_{\rm p}$ は

$$\begin{pmatrix}I_{\rm p1}\cos^2\theta+I_{\rm p2}\sin^2\theta & (I_{\rm p1}-I_{\rm p2})\cos\theta\sin\theta & 0\\ (I_{\rm p1}-I_{\rm p2})\cos\theta\sin\theta & I_{\rm p1}\sin^2\theta+I_{\rm p2}\cos^2\theta & 0\\ 0 & 0 & I_{\rm p3}\end{pmatrix}$$

となる．$\boldsymbol{I}_{\rm p}$ の時間微分 $\dot{\boldsymbol{I}}_{\rm p}$ は，1 行 1 列，1 行 2 列，2 行 1 列，および，2 行 2 列成分にのみ $\dot{\theta}$ の関数が表れ，それ以外（第 3 行成分と第 3 列成分）は変わらないので，0 となる．したがって，$\dot{\boldsymbol{I}}_{\rm p}\boldsymbol{\omega}_{\rm p}=\boldsymbol{0}$ となる．

回転する物体の慣性テンソルは時間の関数であるが，慣性主軸（この場合，第 3 軸）のまわりに物体が回転しても，慣性テンソルの回転軸成分は影響を受けない．したがって，$\boldsymbol{I}_{\rm p}\boldsymbol{\omega}_{\rm p}$ の時間に関する微分は $\boldsymbol{\omega}_{\rm p}$ の回転軸成分の微分に比例する．

第5章　回転運動座標系から見た剛体の回転運動

5.1　運動方程式

絶対座標系からみた剛体の運動方程式は前章で求めたとおり，$\boldsymbol{N}=\dot{\boldsymbol{L}}$ である．これを回転運動座標系からみた方程式に書き換えよう．3.3 節と同様に，運動座標系の原点は絶対座標系と同じとしよう．つまり，絶対座標系から見た角運動量 $\boldsymbol{L}$ は運動座標系から見た角運動量 $\boldsymbol{L}'$ と座標変換テンソル $\boldsymbol{R}$ を用いて，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}'$ 等と表す．すると，3.3 節と同様手順で，

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\mu}'\times\boldsymbol{L}'+\dot{\boldsymbol{L}}') \tag{5.1}$$

$\dot{\boldsymbol{L}}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{L}')=\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{L}}'=\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{L}}'$
$=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\mu}'\times\boldsymbol{L}')+\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{L}}'=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\mu}'\times\boldsymbol{L}'+\dot{\boldsymbol{L}}')$

が得られる．ここで，$\boldsymbol{\mu}$は，任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，$\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{a}$ を満たす．$\boldsymbol{\mu}$は $\boldsymbol{R}$ に対してきまる，運動座標系の回転角速度に対応するベクトルである．

式 (5.1) の関係を運動方程式代入して，

$$\boldsymbol{N}'=\boldsymbol{\mu}'\times\boldsymbol{L}'+\dot{\boldsymbol{L}}' \tag{5.2}$$

が得られる．これが回転運動座標系からみた剛体の回転運動の方程式である．

式 (5.2) における $\boldsymbol{\mu}$ は，式 (3.7) における $\boldsymbol{\omega}$ に相当する量である．
ここで，$\boldsymbol{\omega}$ ではなく $\boldsymbol{\mu}$ を使ったのは，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}$ で $\boldsymbol{\omega}$ を使うからである．

5.2　運動エネルギー

絶対座標系で表した運動エネルギーを運動座標系からみた量で表すと，

$$E=\frac{1}{2}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\boldsymbol{L}'\cdot\boldsymbol{\omega}' \tag{5.3}$$

となる．この関係は，運動エネルギーの表現が座標系の取り方に依存しないことを意味する．

$\frac{1}{2}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{L}')\cdot(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}')=\frac{1}{2}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{L}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}'$
$=\frac{1}{2}\boldsymbol{L}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}'=\frac{1}{2}\boldsymbol{L}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}'=\frac{1}{2}\boldsymbol{L}'\cdot\boldsymbol{\omega}'$

5.3　ジャイロモーメント

羅針盤のように，回転体の角運動量が保存される性質を利用した機器を，一般に，ジャイロ（gyro）とよぶ．ジャイロを一定の角速度

ω でまわしておき，ジャイロの回転軸をそれに垂直な方向に一定速度 μ で回す場合を考えよう．3.3 節で例にあげた地表座標系で $\alpha = \pi/2$ の場合，つまり，z 軸と ζ 軸が同じ方向になる場合で，ξ 軸が x 軸から y 軸 方向へμt の角度をとるようにし，ξ 軸周りに一定の角速度 ω で回転するジャイロを考えればよい．

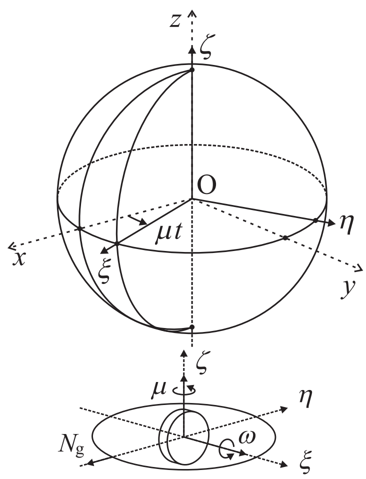
運動方程式 (5.2) において，角運動量 $\boldsymbol{L}'$ が変化しないので，$\dot{\boldsymbol{L}}' = \boldsymbol{0}$ となる．角運動量 $\boldsymbol{L}'$ のジャイロの回転軸を角速度 $\boldsymbol{\mu}'$ で回すためには，

$$\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{\mu}' \times \boldsymbol{L}' \tag{5.4}$$

の力が必要なことがわかる．このジャイロを支える枠には，反作用として

$$\boldsymbol{N}'_{\mathrm{g}} = -\boldsymbol{N}' = -\boldsymbol{\mu}' \times \boldsymbol{L}' \tag{5.5}$$

だけの力のモーメントが加わる．これはジャイロモーメントと呼ばれる．地表座標系において $\boldsymbol{\mu}'$ は ζ 方向で，$\boldsymbol{L}'$ は ξ 方向なので，ジャイロモーメントは $-\eta$ 方向に働くことになる．



$$\boldsymbol{N}'_{\mathrm{g}} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_\xi \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ \mu I_\xi \omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.4　歳差運動

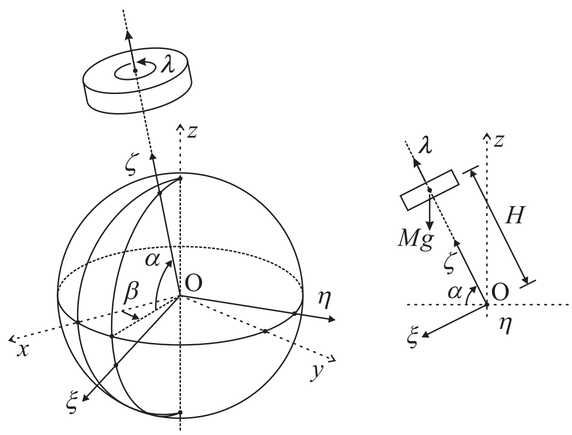
コマを回転させ，回転軸を傾けて手を離すと，回転軸がコマ自体の回転速度よりもゆっくりと回転すること経験したことはないだろうか？この運動を歳差運動 (precession) と呼ぶ．右図のように，円板状の回転体と質量の無視できる軸からなるコマを考え，運動方程式をたてよう．コマの支点を原点 O，コマの回転軸を ζ 軸，$0 < \alpha < \pi/2$ として，図のような座標系をとる．慣性テンソル $\boldsymbol{I}'$ が時間に依存しないようにするためである．慣性テンソルとコマの回転の角速度 $\boldsymbol{\lambda}$ は，

$$\boldsymbol{I}' = \begin{pmatrix} I_\xi & 0 & 0 \\ 0 & I_\xi & 0 \\ 0 & 0 & I_\zeta \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\lambda}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

但し，I_ξ と I_ζ は定数とできる．λ は時間の関数となることに注意しよう．

$\zeta\xi$ 面が x 軸となす角を β とする．$\boldsymbol{\mu}$ は運動座標系の角速度なので，α 回転の成分と，β 回転の成分からなる．つまり，$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_\alpha + \boldsymbol{\mu}_\beta$ とすると，

$$\boldsymbol{\mu}'_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} \text{ より}, \boldsymbol{\mu}' = \begin{pmatrix} -\dot{\beta}\cos\alpha \\ -\dot{\alpha} \\ \dot{\beta}\sin\alpha \end{pmatrix} \tag{5.7}$$



第 3.3 節で例に挙げた地表座標系の場合，我々が居る緯度は変化しないので，運動座標系の角速度は地球の自転の成分のみであった．この場合はコマが転倒する方向の自由度も与えるために，２つの成分が必要となる．第 3.3 節と異なり，ここでは，α も $\dot{\beta}$ も変化する可能性がある．

となる．また，原点からコマの質量中心までの距離を H，重力加速度を g とすると，

$$\boldsymbol{N}' = \begin{pmatrix} 0 \\ HMg\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}$ より，$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\lambda}' + \boldsymbol{\mu}'$ なので，

$$\boldsymbol{\mu}' \times \boldsymbol{L}' = \begin{pmatrix} -I_\zeta\dot{\alpha}\lambda - (I_\zeta - I_\xi)\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha \\ I_\zeta\dot{\beta}\lambda\cos\alpha + (I_\zeta - I_\xi)\dot{\beta}^2\sin\alpha\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

$$\dot{\boldsymbol{L}}' = \begin{pmatrix} I_\xi(-\ddot{\beta}\cos\alpha + \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha) \\ -I_\xi\ddot{\alpha} \\ I_\zeta(\dot{\lambda} + \ddot{\beta}\sin\alpha + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\alpha) \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

が得られる．これらを運動方程式 (5.2) に代入すると，コマの運動の方程式

$$I_\zeta\dot{\alpha}\lambda + (I_\zeta - 2I_\xi)\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha + I_\xi\ddot{\beta}\cos\alpha = 0 \tag{5.11}$$
$$HMg\cos\alpha = I_\zeta\dot{\beta}\lambda\cos\alpha + (I_\zeta - I_\xi)\dot{\beta}^2\sin\alpha\cos\alpha - I_\xi\ddot{\alpha} \tag{5.12}$$
$$\dot{\lambda} + \ddot{\beta}\sin\alpha + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\alpha = 0 \tag{5.13}$$

が得られる．これらは３変数（λ，α, β）に対する連立微分方程式である．一般解はそう簡単に得られそうにない．数値解法を用いれば，初期条件から，その後の推移が計算できる．しかし，各パラメーターに対し，具体的な値を入れる必要があり，一般的な議論はしにくい．そこで，いくつかの特殊な条件を与えた場合に，式 (5.11)∼(5.13) から，解析的に得られる結果を考察してみよう．以降，$t = 0$ の時に $\alpha = \alpha_0$，$\beta = \beta_0$，$\lambda = \lambda_0$ とし，それらの導関数も $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0$，$\dot{\beta} = \dot{\beta}_0$，$\dot{\lambda} = \dot{\lambda}_0$ とする．

市販のほとんどの教科書等では，印刷コストを下げるためと考えられるが，全く説明無く，α を一定と仮定している．そのため，力学を正しく理解している優秀な学生ほど混乱する．注意しよう．
また，回転運動座標系からみた質点の運動方程式 (3.7) や剛体の運動方程式 (5.2) の導出時には，各々，$\boldsymbol{\omega}$ や $\boldsymbol{\mu}$ を任意の時間の関数と扱ってきた．これらを勝手に一定と仮定してはいないことも確認しておこう．

軸の傾斜角一定を仮定した場合　($\alpha = \alpha_0 = \mathrm{const.}$)
これは $\boldsymbol{\mu}$ における $\boldsymbol{\mu}_\alpha$ 成分を無視することと同値である．この時，

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}_0 = \mathrm{const.}, \lambda = \lambda_0 = \mathrm{const.} \tag{5.14}$$

が導かれ，$(I_\zeta\lambda)^2 - 4HMg(I_\xi - I_\zeta)\sin\alpha \geq 0$ の場合に解が存在し，

$$\dot{\beta} = I_\zeta\lambda\frac{1 - \sqrt{1 - 4HMg(I_\xi - I_\zeta)\sin\alpha/(I_\zeta\lambda)^2}}{2(I_\xi - I_\zeta)\sin\alpha} \tag{5.15}$$

が得られる．コマを角速度 λ_0 で回転させると，同じ角速度でコマは回転を続け，式 (5.15) の一定角速度で歳差運動を続けることになる．

高橋が別に配布している「解説：歳差運動の考察.pdf」では，式の変形過程を詳しく記述し，考察している．

この条件を満たさない場合，$\alpha = \alpha_0 = \mathrm{const.}$ の仮定を維持できないことが想像される．

軸の傾斜角が一定でそれが直角に近い場合　（$\alpha \to 0$）

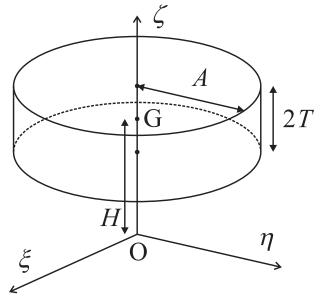
さらに特別な場合，式 (5.15) は

$$\dot{\beta} \to \frac{HMg}{\lambda I_\zeta} \tag{5.16}$$

となる．コマの回転が速い程（λ が大きい程）,（$\dot{\beta}$ は小さくなるので）歳差運動は遅くなる．コマを回した時，摩擦等で回転速度が低下してくるにつれて歳差運動の角速度が上昇した経験はないだろうか？また，$H > 0$ の時，λ と $\dot{\beta}$ の符号は等しいことから，両者の回転方向は同じであることが分かる．さらに，図の様に，半径 A，厚さ $2T$ の円板に長さ H の足を持つコマの場合，$I_\zeta = \rho\pi T A^4$, $M = 2\rho\pi T A^2$ なので，

$$\dot{\beta} \to \frac{2Hg}{A^2\lambda} \tag{5.17}$$

となる．この式より，支点から質量中心までの長さ が同じコマの場合，円筒部の半径 が大きい程，またコマの回転速度が速い程，ゆっくりと歳差運動することがわかる．質量中心に支点のあるコマは歳差運動しないこともわかる．



コマを回さずに傾けて置き静かに手を離す場合　コマを回さないので，$\lambda_0 = 0$，傾けて置き静かに手を離すので，$\dot{\alpha}_0 = 0$，$\dot{\beta}_0 = 0$，の初期条件で式 (5.11)∼ 式 (5.13) を解くべきである．しかし，方程式は解けそうにない．そこで，我々が「経験的に」知っている「知見」をさらに加えてみよう．すなわち，任意の時刻 t において $\lambda = 0$ としてみよう．この条件は，コマを回さずに置いてもコマが回転し始め無いことを意味している．この条件より，

$$\dot{\alpha}\dot{\beta}\{(I_\zeta - 2I_\xi)\sin^2\alpha - I_\xi \cos^2\alpha\} = 0 \tag{5.18}$$

が得られる．{} 内はゼロとは限らないので，$\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0$ が得られ，$\ddot{\beta} = 0$ が導かれる．その結果，

$$\lambda = \lambda_0 = \text{const.}, \beta = \beta_0 = \text{const.}, HMg\cos\alpha = -I_\xi \ddot{\alpha} \tag{5.19}$$

が得られる．最後の式は倒立振り子が倒れる場合の微分方程式と同じである．方程式を解く過程で α 一定の仮定を持ち込んでしまっていては，このような結果は得られない．

パワーリストと呼ばれるトレーニング用具のように，外部の運動で内部の回転体の角速度を増加させることのできる機構も存在する．ここで用いた知見も常に満足されるとは限らない，運動方程式の解を得るために導入した仮定に過ぎないことに注意すること．

第 2.3 節の例を参考に，倒立振り子の微分方程式を是非たててみて欲しい．角度（θ や α）の取り方で sin と cos が変わるだけで，方程式は同じになる．

摩擦力が働く場合　実際のコマを回すと，回転速度も徐々に遅くなるとともに，軸の傾斜が徐々に大きくなり，最後には倒れてしまう．回転の運動エネルギーのロスの要因を考え，摩擦を無視した点が怪しいと思う諸君は多いだろう．では，摩擦がある時，コマはどのよ

うな運動をするのか？考察してみよう．そこで,「摩擦はコマの軸の回転を妨げる方向に働く力のモーメント $\boldsymbol{F}$ である.」と仮定して運動方程式を求めてみよう．簡単化のため，$\boldsymbol{F}$ の大きさは時間に依存せず一定とする．$\boldsymbol{F}$ としたのは，摩擦 (Friction) の意味で，力では無く力のモーメントであることに注意せよ．$\boldsymbol{F}$ の方向は，回転を妨げる方向であるので，$\boldsymbol{\lambda}$ の反対方向である．簡単化のため，$\lambda > 0$ としよう．$F = |\boldsymbol{F}|$ として，式 (5.8) に摩擦の項を加えると，

$$\boldsymbol{N}' = \begin{pmatrix} 0 \\ HMg\cos\alpha \\ -F \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

が得られる．式 (5.8) を式 (5.20) で置き換えたものが，とくべき運動方程式となる．

例によって，解析解は得られそうにない．そこで,「α は徐々に変化するが，その変化速度は緩慢で，$\dot{\alpha} = 0$ とみなせる．但し，回転速度が非常に早いので，$\dot{\alpha}\lambda$ は無視できない.」と仮定してみよう．運動方程式は，

$$I_\zeta \dot{\alpha}\lambda + I_\xi \ddot{\beta}\cos\alpha = 0 \tag{5.21}$$

$$HMg = I_\zeta \dot{\beta}\lambda + (I_\zeta - I_\xi)\dot{\beta}^2 \sin\alpha \tag{5.22}$$

$$-F = I_\zeta(\dot{\lambda} + \ddot{\beta}\sin\alpha) \tag{5.23}$$

となる．式 (5.22) より，

$$\dot{\beta} = I_\zeta \lambda \frac{1 - \sqrt{1 - 4HMg(I_\xi - I_\zeta)\sin\alpha/(I_\zeta\lambda)^2}}{2(I_\xi - I_\zeta)\sin\alpha} \tag{5.24}$$

が得られる．$\dot{\beta}$ の変化がそれほど大きくないとすると，式 (5.23) より，

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{F}{I_\zeta}t \tag{5.25}$$

が得られ，摩擦により，コマの回転速度（λ）が徐々に小さくなることがわかる．さらに，円板部分の半径の大きいコマほど（I_ζ が大きいので），摩擦力が弱いほど（F が小さいほど），回転速度の減少が小さいこともわかる．式 (5.24) により，λ が小さくなるにつれて，$\dot{\beta}$ が大きくなることがわかる．これは，$\ddot{\beta} \simeq 0$ ではあるものの，$\ddot{\beta} > 0$ を意味するので，式 (5.21)，すなわち，

$$\dot{\alpha} = -\frac{I_\xi}{I_\zeta \lambda}\ddot{\beta}\cos\alpha \tag{5.26}$$

より，$\dot{\alpha} < 0$ が導かれる．以上より，摩擦によって，コマの回転速度は徐々に減少し（式 (5.25)），それに伴い，歳差運動の角速度は

式 (5.23) は，摩擦によって，コマの回転運動と歳差運動の角運動量が減ることを意味している．$\ddot{\beta} \simeq 0$ であることは，摩擦の仕事が主にコマの回転のエネルギーを奪うことを意味している．

式 (5.24) は，$\alpha \to 0$ のとき，$\dot{\beta} \to \frac{HMg}{\lambda I_\zeta}$ であったことを思い出そう．

徐々に速くなり（式 (5.24)），コマの傾斜も徐々に大きくなる（式 (5.26)）ことが説明される．また,（式 (5.26)）より，コマの回転速度（λ）が遅い程，また，I_ξ/I_ζ が大きい程（つまり，足の長いコマ程），傾斜速度は大きいことが導かれる．全て，我々の経験と一致しているのではないだろうか？

最後に

この様な考察を行いながら物理に基づき論理を展開することで，実際の問題を解決するのが工学であり，理学と大きく異なる点の一つである．したがって，数学や物理はしっかり勉強しておく必要がある．昨今では，パソコンの演算速度が速くなったために，この程度の連立微分方程式も労せず数値的に解くことができる．数値計算のスキルも勉強しておくと考察の道具として役立つ．しかし，ケースバイケースの数値計算結果に比べ，解析解の有用性は比べものにならない程高い．さまざまな物理量の影響が式で明示されるからである．たとえ，特殊な条件や特殊な仮定のもとの解析解であったとしても，その有用性は圧倒的である．フーコー振り子や歳差運動に対して行った考察の重要性を理解して欲しい．面倒ではあったが，仮定を省略しなければ単純な論理であった．

昨今の難しい問題を解決できる社会から必要とされる人材になるためには，狭い学問分野に閉じこもるのではなく，幅広い分野の知識が必要である．幅広い知識でも，枝葉末節ではなく，より原理的な部分，基礎的な部分（特にその意味するところ）をしっかりと理解していることが（工学への応用では）求められる．身の回りの多くの製品は，運動力学，材料力学，熱力学，流体力学，電磁気学，統計力学，量子力学，等々$\cdots$といった自然科学に基づいて設計されていることを忘れてはならない．さらに，自然科学は誰もが理解できる論理の積み上げによって作られていることを再認識して欲しい．積み上げる物が多くなると，複雑になって面倒な場合はあるが，面倒なだけで難しいものは一切ない．それが自然科学なのである．講義等で，万一，難しく感じることがあれば，それはどこかに論理の飛躍があるからである．習ったことを整理して質問すれば必ず解決する．この点を認識して今後の講義を履修してもらいたい．

昨今，仮定や前提を省略して説明するテキストや参考書が多い．非常に，嘆かわしいことである．自然科学に対する常識を疑う．運悪くそんな教科書にあたってしまったら，難しく感じて当然である．そんなときは質問しよう．

付 録A　ベクトルとテンソル

A.1　本書における表記

ベクトルもテンソルの一種である．本書では，ベクトル量やテンソル量を太字（ボールド）で表記している．つまり，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{R}$, 等はベクトルやテンソルを意味し，r，a，A，R 等はスカラー量を意味している．また，特に断らない限り，それらの成分を

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} R_{x\xi} & R_{x\eta} & R_{x\zeta} \\ R_{y\xi} & R_{y\eta} & R_{y\zeta} \\ R_{z\xi} & R_{z\eta} & R_{z\zeta} \end{pmatrix},,,$$

等として扱っている．ベクトルやテンソルの微分や積分は,

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \dot{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix}, \dot{\boldsymbol{r}}' = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix},,,$$

$$\int_{\mathrm{V}} \boldsymbol{A} dm = \begin{pmatrix} \int_{\mathrm{V}} A_{11} dm & \int_{\mathrm{V}} A_{12} dm & \int_{\mathrm{V}} A_{13} dm \\ \int_{\mathrm{V}} A_{21} dm & \int_{\mathrm{V}} A_{22} dm & \int_{\mathrm{V}} A_{23} dm \\ \int_{\mathrm{V}} A_{31} dm & \int_{\mathrm{V}} A_{32} dm & \int_{\mathrm{V}} A_{33} dm \end{pmatrix},,,$$

のように，各成分の微分や積分を成分とするベクトルやテンソルを示すこととする．上記は，時間による微分と，体積積分の例である．

A.2　転置と逆

行と列を入れ替える操作を転置とよび,「$^{\mathrm{T}}$」を用いて表している．

$$\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} = (\ x\ y\ z\ )\ , \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = (\ a_x\ a_y\ a_z\ )\ , \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

逆テンソルは「$^{-1}$」を用いて表している．

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{E}$ は単位テンソルである．

A.3　積

内積は「·」，外積は「×」を用いて表している．本書ではテンソル積をあえて使わないようにしたが，今後便利な場合が出てくるので徐々に慣れておくことをすすめる．内積は転置を用いて表せる．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z \\ A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z \\ A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z \end{pmatrix}$$

内積：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$

$$外積：\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

A.4　よく使う公式

任意のテンソルを $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，任意のベクトルを $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，任意の回転座標変換テンソルを $\boldsymbol{R}$ として，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} \tag{A.1}$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{A.2}$$

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{A.3}$$

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}) \tag{A.4}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} \tag{A.5}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}) = \dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{a}}, \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{B}} \tag{A.6}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \dot{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\dot{\boldsymbol{b}}, \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \dot{\boldsymbol{a}}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\dot{\boldsymbol{b}} \tag{A.7}$$

ベクトルの座標変換を

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{r}', \qquad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}, \tag{A.8}$$

$\boldsymbol{A}$ や $\boldsymbol{a}$ などを成分で表わせば，これらの公式を簡単に証明することができる.「本当かな？」と思った諸君は是非試してみて欲しい.
科学は，このように，間違いのないことを証明しながら，石を積み上げるように，論理を構築する行為である．あやふやなままにしていると，文字通り,「砂上の楼閣」となってしまう．面倒でも，たった一度証明しておくだけで，安心して論理の巨城を積み上げて行くことができる.

のように定義すると，テンソルの座標変換は，

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R} \tag{A.9}$$

のように表せる．

A.5 重要な定理

定理

$\boldsymbol{R}$ が回転の座標変換テンソルであれば，$\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ である．

証明　任意のベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に対し，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}'$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{b}'$ とすると，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の相対関係は座標変換後も変わらない．したがって，両者の内積も座標変換の前後で変わらない．よって，
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'$ これを変形して,,,
$(\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}')\cdot(\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}') = \boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'$
$(\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}')^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}') = \boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'$
$(\boldsymbol{a}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}') = \boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'$
$\boldsymbol{a}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'$
$\boldsymbol{a}'\cdot(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}') = \boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'$
$\boldsymbol{a}'\cdot(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{b}') = 0$
となる．したがって，$\boldsymbol{E}$ を単位ベクトルとして，
$\boldsymbol{a}'\cdot(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{b}' = 0$
が成り立つ．任意の $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に対し，この式が成り立つので，
$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}$，すなわち，$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}^{-1}$
証明終わり．

定理

$\boldsymbol{R}$ が回転の座標変換テンソルであるとき，
$\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ は反対称テンソルである．

証明　反対称テンソルは転置をとると符号が反転するテンソルである．
$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$
の両辺を時間に関して微分すると，
$\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$．したがって，
$\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}} = -\left\{\left(\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right\}^{\mathrm{T}} = -\left\{\left(\dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\right\}^{\mathrm{T}}$

$= -\left\{\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\right\}^{\mathrm{T}}$
$\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ は転置をとると，符号が反転することが示される．したがって，反対称行列である．
証明終わり．

> 定理
>
> $\boldsymbol{A}_{\mathrm{anti-s.}}$ が反対称テンソルのとき，任意のベクトル $\boldsymbol{r}$ に対し，
> $\boldsymbol{A}_{\mathrm{anti-s.}}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{\omega}$ がある．

証明　$\boldsymbol{A}_{\mathrm{anti-s.}}$ は反対称テンソルなので，
$\boldsymbol{A}_{\mathrm{anti-s.}} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}$ とおける．
$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ とおくと，任意の $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，
$\boldsymbol{A}_{\mathrm{anti-s.}}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} (A_{13})z - (-A_{12})y \\ (-A_{12})x - (-A_{23})z \\ (-A_{23})y - (A_{13})x \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}$
である．よって，任意の反対称テンソル $\boldsymbol{A}_{\mathrm{anti-s.}}$ に対し，$\boldsymbol{\omega}$ を
$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} -A_{23} \\ A_{13} \\ -A_{12} \end{pmatrix}$ のように定義すれば，これらは与式を満たす．よって，任意のベクトル $\boldsymbol{r}$ に対し，与式を満たすベクトル $\boldsymbol{\omega}$ がある．
証明終わり．

> 定理
>
> $\boldsymbol{R}$ が回転の座標変換テンソルで，任意のベクトル $\boldsymbol{r}$ に対し，
> $\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ であるとき，$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}$ と表わせる．
> 但し，座標変換は「$'$」を用いて $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{r}'$ と表す．

証明　$\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ の両辺に，左から $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ を作用させると，
$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$
$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}'$
$\boldsymbol{r}$ は任意なので，$\boldsymbol{r}'$ も任意に選ぶことができる．
したがって，$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{r}$ と書くこともできる．
証明終わり．

定理

実数を成分にもつ対称テンソルの固有値は実数である．

証明　実数を成分にもつ対称テンソルを $\boldsymbol{I}$ とする．その固有値と固有ベクトルを，各々，λ および $\boldsymbol{\mu}$ とする．λ の共役複素数を λ^*，$\boldsymbol{\mu}$ の共役複素ベクトルを $\boldsymbol{\mu}^*$ とする．固有値の定義より，
$\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu} = \lambda\boldsymbol{\mu} \cdots (1)$
であるが，この右から $\boldsymbol{\mu}^*$ の内積を作用させると，
$\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mu}^* = \lambda\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mu}^*$
$(\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}^* = \lambda\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mu}^*$
$\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}^* = \lambda\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mu}^* \cdots (2)$
一方，式 (1) の両辺の複素共役をとると，$\boldsymbol{I}$ の成分は実数なので，
$\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu}^* = \lambda^*\boldsymbol{\mu}^*$
であるが，この左から $\boldsymbol{\mu}$ の内積を作用させると，
$\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu}^* = \lambda^*\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mu}^*$
$\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu}^* = \lambda^*\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mu}^* \cdots (3)$
が得られる．$\boldsymbol{I}$ は対称テンソルなので，式 (2) と式 (3) の左辺は等しい．固有ベクトルの大きさはゼロではないので，
$\lambda = \lambda^*$，つまり，λ は実数と言える．
証明終わり．

定理：複素数 z の複素共役を z^* で表すとき，任意の複素数 z_1，z_2 に対し $(z_1z_2)^* = z_1^*z_2^*$ である．
証明：$z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$ とおくと，
$(z_1z_2)^* = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) \cdots (1)$
$z_1^*z_2^* = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$
$\quad = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) \cdots (2)$
式 (1) と式 (2) の右辺が等しいので，$(z_1z_2)^* = z_1^*z_2^*$.

定理

対称テンソルの固有ベクトルは互いに直交する．

証明　任意の異なる 2 つの固有ベクトルを，$\boldsymbol{\mu}_1$，$\boldsymbol{\mu}_2$ とする．それらに対応する固有値を，各々，λ_1，λ_2 とする．固有値の定義より，
$\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\mu}_1 \cdots (1)$ および，$\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\mu}_2 \cdots (2)$ が成り立つ．
2 つの固有値が偶然同じでも，式 (1) か式 (2) のどちらかの両辺を定数倍することで，$\boldsymbol{\mu}$ の方向を変えずに，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ となる組み合わせにすることができる．
式 (1) の左から $\boldsymbol{\mu}_2$ の内積を作用させると，
$\boldsymbol{\mu}_2\cdot(\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu}_1) = \lambda_1\boldsymbol{\mu}_2\cdot\boldsymbol{\mu}_1$
$\boldsymbol{\mu}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\mu}_2\cdot\boldsymbol{\mu}_1 \cdots (1')$
式 (2) の左から $\boldsymbol{\mu}_1$ の内積を作用させると，
$\boldsymbol{\mu}_1\cdot(\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu}_2) = \lambda_2\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2$
$\boldsymbol{\mu}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2$
両辺はスカラー量なので，転置をとっても変わらない．

$(\boldsymbol{\mu}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\mu}_2)^{\mathrm{T}} = \lambda_2\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2$
$\boldsymbol{\mu}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}_1 = \lambda_2\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2 \cdots (2')$
$\boldsymbol{I}$ は対称テンソルなので，$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}$ である．ゆえに，式 $(1')$ と式 $(2')$ の左辺は等しい．したがって，
$(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2 = 0$，が成り立つ．
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ なので，$\boldsymbol{\mu}_1\cdot\boldsymbol{\mu}_2 = 0$
よって，$\boldsymbol{\mu}_1$ と $\boldsymbol{\mu}_2 = 0$ は直交する．
証明終わり．

付 録B　力学で良く使う微分方程式の解

B.1　定係数２階線形微分方程式（同次方程式）

これに関連する内容は概ね大学２年生の最初の数学で習うことと思う．ここでは，本書を読むのに役立つ最小限の知識のみ記すことにする．数学では厳密でより詳細な内容を学べるので楽しみにして欲しい．

a，b，c を定数，x を時間 t の関数として，微分方程式

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \tag{B.1}$$

の厳密解は，特性方程式 $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ が異なる２解 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ をもつとき，

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{B.2}$$

と表せる．特性方程式が１つの重解 λ をもつとき，

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} \tag{B.3}$$

と表せる．但し，C_1，C_2 は任意の定数である．λ が複素数の場合を心配するかもしれないが，心配無用である．オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{B.4}$$

より複素数の部分を係数に出してしまうことができる．C_1，C_2 は任意なので，複素数でもかまわない．

B.2　単振動

バネにつながれた質点や，振り子の運動等，運動方程式が微分方程式

$$\ddot{x} + cx = 0 \tag{B.5}$$

のように表される場合も多い．この式は前節の特別な場合に相当し，$\lambda = \pm i\sqrt{c}$ となる．よって

式 (B.6)~ 式 (B.8) どれも２つの任意定数を持つ．例えば，初期位置と初期速度を与えると，任意定数は決まる．どの形で表すかは，個人の趣味である．諸君はどの表し方が好みだろうか？

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{+i\sqrt{c}t} + C_2 e^{-i\sqrt{c}t} && \text{(B.6)} \\ &= B_1 \cos(\sqrt{c}t) + B_2 \sin(\sqrt{c}t) && \text{(B.7)} \\ &= A\sin(\sqrt{c}t + \alpha) && \text{(B.8)} \end{aligned}$$

と表せる．

付 録C　惑星や彗星の運動

C.1　運動方程式

太陽と地球の間に働く万有引力（重力）やイオンと電子の間に働く静電力は，両者の距離の 2 乗に反比例する．運動方程式は，太陽を原点として，

$$\frac{A}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = m\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{C.1}$$

と表される．ここで，A は定数である．質点の運動方程式から導かれる回転の運動方程式 $\boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{L}}$ において，質点には中心力しか働かないので，力のモーメントは働かない．したがって，角運動量は保存される角運動量ベクトルの方向を z 方向にとると，地球の公転面を xy 面，つまり，$z = 0$ とすることができる．そこで，xy 面における極座標を用いると，

回転の運動方程式は，質点の運動方程式から導かれた．振り子の運動の場合も，回転運動として扱って導いた運動方程式は，質点として扱って導いた運動方程式と一致したことを思い出そう．

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

となる．これを運動方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} A &= mr^2(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) && \text{(C.3)} \\ 0 &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} && \text{(C.4)} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

と変形して代入すると，きれいな形になる．

が得られる．式 (C.4) は角運動量保存則に対応している．角運動量の大きさを L とすると，$I_z = mr^2$ および $\omega_z = \dot{\theta}$ より，$L = mr^2\dot{\theta}$ と表せる．したがって，L を定数として，

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \tag{C.5}$$

が得られる．式 (C.5) の関係を使って運動方程式 (C.3) を解くと，

$$r = \frac{-L^2/(mA)}{1 - B\cos(\theta + \beta)} \tag{C.6}$$

$u = 1/r$ の変数変換を用いる．$du/d\theta$ を用いて $\ddot{r}$ を θ で表す．式 (C.5) の関係も用いると，
$\ddot{r} = \frac{L}{mr^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$ が得られる．これらを運動方程式 (C.3) に代入すると，
$\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{L}{m}u = \frac{A}{L}$ が得られる．この方程式の一般解は，
$u = C_1\cos(\theta + C_2) - \frac{mA}{L^2}$ なので，左式が得られる．

が得られる．B と β は任意の定数である．この式は円錐曲線を表す式として知られている．

C.2　円錐曲線

xy 平面上の点を極座標で表したとき，

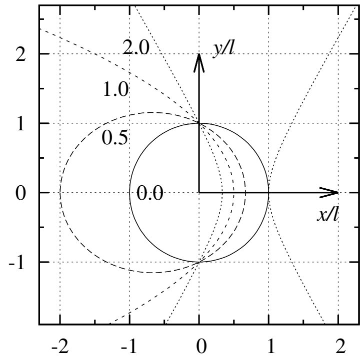
$$r(\theta) = \frac{\pm l}{1 \pm \epsilon \cos\theta} \tag{C.7}$$

で表される曲線群を円錐曲線と呼ぶ．曲線群の焦点が原点である．ϵ は離心率と呼ばれ，

- $\epsilon = 0$　　円
- $0 < \epsilon < 1$　　楕円
- $\epsilon = 1$　　放物線
- $1 < \epsilon$　　双曲線

に対応する．いくつかの例を右に示す．

式 (C.7) の $\pm$ の符号は，θ に位相を与えることで $+$ にできる．曲線の種類は，これらの符号や l に関係なく，離心率 ϵ のみによって決まる．



$\epsilon = 0.0, 0.5, 1, 0, 2.0$ に対する $r(\theta) = \frac{l}{1\pm\epsilon\cos\theta}$ のプロット．

C.3　ケプラーの法則

第 1 法則（楕円軌道の法則）

惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を動く．

第 2 法則（面積速度一定の法則）

太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に通過する面積は一定である．

第 3 法則（調和の法則）

惑星の公転周期の 2 乗は，軌道の長径の 3 乗に比例する．

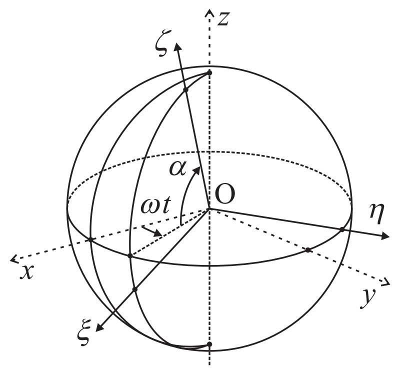
ケプラーはティコ・ブラーエの観測記録に基づき，経験的にこれらの法則性を見出した．第 1 法則の楕円軌道は運動方程式の解に含まれており，第 2 法則は角運動量保存則に等しい．第 3 法則も運動方程式から導くことができる．

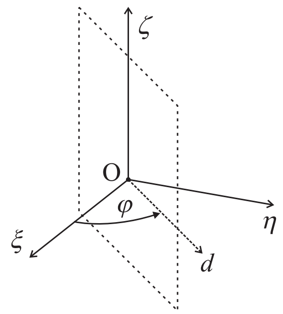
C.4　イオンと電子の相互作用，他

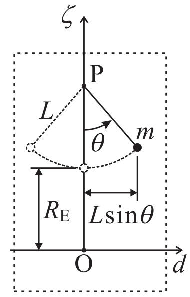
半径の 2 乗に反比例する力が働く場合は，全て，これと同じ運動方程式が得られる．解は円錐曲線で表される．イオンと電子，イオン同士，電子同士の相互作用も同じである．電子に関しては（質量が小さいので）粒子の波動的性質も無視できなくなるが，古典物理の範囲における計算も良い近似として分析装置の設計などに役立てられている．

付 録D　フーコー振り子の考察

D.1　運動座標系







右図の球を半径 R_{E} の地球とみなし z 軸を自転軸とする．地球の自転の角速度は ω である．振り子の運動を地表（すなわち球の表面）で観測する．観測点は北緯 α (rad) である．右図の様に運動座標系をとる．$\xi\eta$ 面に ζ 軸と垂直な d 軸をとり，振り子は ζ 軸と d 軸を含む破線の面内で振れるとする．その時，ξ 軸と d 軸の角度を φ とする．O は地球の中心で $\zeta = R_{\mathrm{E}}$ の位置が地表である．質量 m のおもりが長さ L の糸で点 P よりぶら下げられている．糸に加わる張力を T とする．おもりや糸に対する空気抵抗は無視する．$L \ll R_{\mathrm{E}}$ であるので，重力加速度は g で一定とみなせる．

D.2　運動方程式

質点に加わる力は，張力と重力なので，

$$\boldsymbol{f}' = \begin{pmatrix} -T\sin\theta\cos\varphi \\ -T\sin\theta\sin\varphi \\ T\cos\theta - mg \end{pmatrix} \tag{D.1}$$

また，運動座標系は z 軸周りに回転しているので，

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \text{よって，} \quad \boldsymbol{\omega}' = \omega \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \tag{D.2}$$

となる．これらを用いると，運動方程式 (3.7) は，

$$\begin{pmatrix} -T\sin\theta\cos\varphi \\ -T\sin\theta\sin\varphi \\ T\cos\theta - mg \end{pmatrix} + m\omega^2 \begin{pmatrix} \xi\sin^2\alpha + \zeta\sin\alpha\cos\alpha \\ \eta \\ \xi\sin\alpha\cos\alpha + \zeta\cos^2\alpha \end{pmatrix}$$
$$-2m\omega \begin{pmatrix} -\dot{\eta}\sin\alpha \\ \dot{\xi}\sin\alpha + \dot{\zeta}\cos\alpha \\ -\dot{\eta}\cos\alpha \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} \tag{D.3}$$

となる．但し，

$$\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\sin\theta\cos\varphi \\ L\sin\theta\sin\varphi \\ R_{\mathrm{E}} + L - L\cos\theta \end{pmatrix} \tag{D.4}$$

である．式 (D.3) の ξ, η, ζ に，式 (D.4) を代入したものが，フーコー振り子に対する厳密な運動方程式である．これは，θ, φ, T を変数とする，３元連立微分方程式である．厳密解を解析関数として，得ることは至難の業である．

x が小さくても，$\dot{x}$ や $\ddot{x}$ が小さいとは限らない．面倒でも，真面目に $\boldsymbol{r}'$ を微分して，
$\dot{\xi} = L(\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi)$
$\dot{\eta} = L(\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi)$
$\dot{\zeta} = L\dot{\theta}\sin\theta$　さらに,,,
$\ddot{\xi} = L(\ddot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\theta}^2\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi)$
$\quad -L(\ddot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi)$
$\ddot{\eta} = L(\ddot{\theta}\cos\theta\sin\varphi - \dot{\theta}^2\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi)$
$\quad +L(\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi)$
$\ddot{\zeta} = L(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)$
を式 (D.3) に代入しないといけない・・・.

D.3　仮定の導入による方程式の単純化

高橋が別に配布している「解説：フーコー振り子の考察.pdf」では，式の変形過程を詳しく記載し，考察している．仮定１を用いると，式 (D.3) は若干単純になる．ζ 成分の式より T を求め，ξ と η 成分の式に代入することで，T を消去できる．その結果，θ，φ を変数とする，２つの微分方程式を得ることができる．
「遠心力 $\ll$ 重力，となる程度に，ω が小さい.」と表現した方が良いかも知れない．

仮定１

遠心力の項は無視できる．

としてみよう．$L \ll R_{\mathrm{E}}$ であるので，遠心力は R_{E} だけで決まってしまい，運動座標系から観測しても一定とみなせる．位置や速度に依存しない一定の力であれば，一様な重力場と同じで，振り子の振れ方向を変えることはできない．そもそも，重力にくらべて遠心力は，はるかに小さい．それに，我々が知りたいのは，主に，φ の変化であるので，無視してみよう！という発想である．

仮定２

振り子の振れ幅は十分に小さい．

としてみよう．$\sin\theta = \theta$，$\cos\theta = 1$ とできる．

仮定２および仮定３を用いると，上述の２つの微分方程式は，
$(g\theta + L\ddot{\theta})\cos\varphi - L(2\omega\dot{\theta}\sin\alpha + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}\theta)\sin\varphi = 0$
$(g\theta + L\ddot{\theta})\sin\varphi - L(2\omega\dot{\theta}\sin\alpha + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}\theta)\cos\varphi = 0$
となる．両式の２乗和をとると
$(g\theta + L\ddot{\theta})^2 + L^2(2\omega\dot{\theta}\sin\alpha + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}\theta)^2 = 0$
となり，() 内はどちらもゼロであることがわかる．

仮定３

$\ddot{\theta}\theta^2, \dot{\varphi}^2\theta, \omega\dot{\varphi}\theta$（３次の項）と, $\omega\dot{\varphi}\theta^2$（４次の項）は無視できる．

としてみよう．我々の経験上，各々は小さいので，それらの積はさらに小さくなることが予想される．しかし，慎重を期して，先ず，３次以上の項を無視してみようと言う発想である．最後に，

仮定４

$\ddot{\varphi}\theta$ の項は無視できる．

としてみよう．これは２次の項ではあるが，我々が地上で観測する φ の変化速度 $\dot{\varphi}$ は非常に遅く，$\dot{\varphi}$ の変化率 $\ddot{\varphi}$ はさらに小さいので無視してみようという発想である．これも我々の経験に基づいた仮定であることに注意しよう．

以上の仮定を用いると，方程式は，

$$L\ddot{\theta} + g\theta = 0 \tag{D.5}$$

$$\dot{\varphi} = -\omega \sin\alpha \tag{D.6}$$

となり，やっと解くことができる．式 (D.5) は単振動の方程式である．式 (D.6) より，振り子の振れ方向の変化がわかる．すなわち北極においては $\dot{\varphi} = -\omega$ となり，地球の自転と逆方向に振れ方向が変化し，１日で１回転することになる．一方，赤道上においては $\dot{\varphi} = 0$ となり，振れ方向は変化しないことになる．

導入した仮定について　これらの仮定は本当に正しいだろうか？高速で自転する星の上で観測する場合，遠心力の項は明らかに小さくない．非常に重力の強い星の上では，θ は小さくても，$\dot{\theta}$ は大きいかも知れない．したがって，このような仮定を導入する場合は，極めて慎重にならないといけない.「仮定せずに解きたい…」と感じた諸君は全く正しい．これらの仮定は，地球上における現象の観察から得られる知見を含んでいる．数学（論理学）的には，結果を仮定したら，その結果が得られるのはあたりまえである．しかし，仮定したのは得られた結果の全てではない．最小限の仮定から，振れ方向の変化方向やその大きさの緯度依存性まで導くことができた．仮定の下で得られた結論も現実には有用な場合が多く，それが工学の面白いところである．但し，**仮定を明らかにしない限り，結論には意味がない**ことを忘れてはならない．近年はパソコンの演算速度が非常に早くなっているので，数値計算で検証しながら検討することも容易である．数値計算の方法は，シミュレーション工学等の講義で習うことと思う．楽しみにして欲しい．

仮定（論理）を明記していない参考書で勉強すると，（当然，何故，結論が導き出されるのか理解できず,）「フーコー振り子の理論は難しい…」という印象を持ってしまう．しかし，仮定が明記さえされておれば,（このとおり）全く難しくない．論理を明記すると，説明が長くなり式も多くなる．論理を明記してある方が，見た目は大変そうでも，実は，圧倒的に理解しやすい，つまり，簡単なのである．
文字数が少なくても，騙されてはいけない．論理がなければ意味がない．同様に，沢山書いてあっても，論理が無ければ，役に立たない．残念なことに，そのような書籍も珍しくない．諸君には，良い書籍を見抜く目も養ってもらいたい．
特に近年，無数の書籍が出版され，無数の書籍が絶版になっている．良い教科書を見つけて購入すれば，それは一生の財産になる．

以上．