専門科目（午前） 24 大修

国際開発工学 時間 9:30~12:30

注意事項

1. 次の [1] 国際開発に関する基礎知識, [2] 微分積分学, [3] 線形代数学, [4] 確率・統計, [5] 力学, [6] 電気磁気学, [7] 熱力学 の中から, 4 題を選択して解答せよ。
2. 解答は 1 題ごとに別々の解答用紙（各題 1 枚）に記入せよ。
3. 各解答用紙に必ず問題番号及び受験番号を記入せよ。
4. 定規, コンパス, 電卓は使用不可である。

問題 ［１］

1. UNDP（国連開発計画）が毎年刊行する「人間開発報告書」には，世界各国に対する人間開発指数(Human Development Index, HDI)の値が掲載されている。

   1.1. HDI が提案された背景やその構成要素など，HDI について知るところを記述せよ（300 字程度）。

   1.2. ある開発途上国について，ある暦年の経済指標（一人当たり GDP とする）に基づく国際ランキング（上位からα位とする）と，同じ暦年の HDI に基づく国際ランキング（上位からβ位とする）の関係が$(\alpha-\beta)<0$となる場合，HDI の特徴を踏まえて，当該国はどのような状況にあると想定されるか論じよ(300 字程度)。

2. 仮想Ａ国は，５世帯（家計）によって構成されているとする。Ａ国の(Ｘ)年度（暦年）および（Ｘ+１）年度（暦年）における世帯所得は，それぞれ表１-1 の通りであるとする。

表 1-1　Ａ国における所得の分布（(Ｘ)年度および（Ｘ＋１）年度）

	世帯	1	2	3	4	5
所得	(Ｘ)年度	200	300	500	700	800
(万円)	（Ｘ＋１）年度	180	250	520	650	1,000

   2.1. 横軸に低所得世帯順の累積世帯数の百分比（%），縦軸に累積所得の百分比（%）をとることによって描かれる曲線をローレンツ曲線と呼ぶが，表１−1 のデータに基づき，(Ｘ)年度および（Ｘ＋１）年度のローレンツ曲線を明確に区別して図示せよ。図示のために必要な仮定があれば，明示すること。なお，点と点の間は直線で結んでよい。

   2.2. 上記 2.1. で求めたローレンツ曲線を利用して，ぞれぞれの年度のジニ係数を計算し，(Ｘ)年度の値と（Ｘ＋１）年度のジニ係数の値を比較して，Ａ国における所得分布の変化について論じよ（300 字程度）。

問題［2］

1．以下の常微分方程式の一般解を求めよ。

（1） $f''(x)+2f'(x)-3f(x)=0$

（2） $f''(x)+4f(x)=0$

（3） $f''(x)+4f'(x)+4f(x)=0$

2．以下の常微分方程式の一般解を求めよ。その際，上記１の解答結果を使用して良い。

（1） $f''(x)+2f'(x)-3f(x)=\exp(x)$

（2） $f''(x)+4f(x)=\sin 2x$

（3） $f''(x)+4f'(x)+4f(x)=2+x$

3．常微分方程式の厳密解を数値解と比較した際の利点・欠点を５０字程度で説明せよ。

　ただし，数値解とはオイラー法・ルンゲクッタ法などによる逐次解法に基づく解を意味する。

4．次の微分方程式(a)に関する設問（１）～（６）ついて答えよ。

$$\frac{dN}{dt}=(N^2-4)\,t^2 \qquad \text{(a)}$$

ただし、$N^2 \neq 4$ とする。

（1） (a)式は，常微分方程式か偏微分方程式か，理由と共に記せ。

（2） (a)式は，線形か非線形か，理由と共に記せ。

（3） (a)式は，同次形か非同次形か，理由と共に述べよ。

（4） (a)式を変形し，従属変数と独立変数をそれぞれ左辺と右辺に分離した(b)式を導け。

（5） (b)式の右辺・左辺についてそれぞれ積分を実行せよ。

（6） (a)式の一般解を求めよ。

問題 [3]

次の行列式に関する問いに答えよ。解答には途中の式も示すこと。

1. 次の 3 つの行列式の値をそれぞれ求めよ。

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. n 文字の置換全体の集合を S_n で表す。例えば，S_4 のある要素 σ_0 を

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{3–1}$$

と記せば，$\sigma_0(1) = 2$, $\sigma_0(2) = 4$, $\sigma_0(3) = 1$, $\sigma_0(4) = 3$ であることを意味する。
S_n の 2 つの要素 σ_1 と σ_2 の積 $\sigma_1 \circ \sigma_2$ を，すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2)(i) = \sigma_1(\sigma_2(i))$$

として定義する。
互換とは相異なる 2 つの要素だけを入れ替える置換である。例えば，S_4 に含まれる 2 と 3 を入れ替える互換は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

と書くことができる。このとき，式 (3–1) で与えた σ_0 を互換の積で表せ。

3. 置換 σ に関する符号関数 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は，σ が偶置換のときにその値が $+1$，奇置換のときに -1 になるものとする。S_3 に含まれる 6 つの置換を必要ならば互換の積に分解し，それぞれ符号関数値を求めよ。

4. A を 3 次正方行列とする。A の (i, j)-成分を A_{ij} と記せば，A の行列式 $|A|$ は，次のように定義できる。

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)\, A_{1\,\sigma(1)} A_{2\,\sigma(2)} A_{3\,\sigma(3)}$$

この定義に従い，$|A|$ を A の成分を用いて表せ。

問題 [4]

ある病院が，患者を 3 人まで乗せられる小型の送迎車を運行している。送迎車乗り場で，ある患者が乗車してから次の患者が乗車するまでの時間間隔 t は，平均 5 分の指数分布に従うものとする。なお，送迎車は常に待機しているものとする。以下の問いに答えよ。ただし，表 4 − 1 の数表を用いてよい。

1. t の確率密度関数は，t が 0 以上のとき，$f(t) = A\exp(-\mu t)$ で表される。A を μ を用いて表せ。また，この結果を用いて μ の値を求めよ。

2. 乗車患者数が 3 名に達したところで発車する方式を採用する。なお，患者は一旦乗車したら，発車まで降車しないものとする。

   (a) 最初の患者が乗り場に来てから発車するまでの平均の待ち時間を求めよ。

   (b) 最初の患者が 15 分以上待たされる確率を求めよ。

3. 2 において，最初の患者が来てから 15 分経過したら，3 名揃ってなくても発車する方式を追加導入する場合，発車時に送迎車に乗車している平均の患者数を求めよ。

表 4 − 1　指数関数 $\exp(a+b)$ の数表

$a \setminus b$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
0	1.0×10^0	1.1×10^0	1.2×10^0	1.3×10^0	1.5×10^0
1	2.7×10^0	3.0×10^0	3.3×10^0	3.7×10^0	4.1×10^0
2	7.4×10^0	8.2×10^0	9.0×10^0	1.0×10^1	1.1×10^1
3	2.0×10^1	2.2×10^1	2.5×10^1	2.7×10^1	3.0×10^1
4	5.5×10^1	6.0×10^1	6.7×10^1	7.4×10^1	8.1×10^1
5	1.5×10^2	1.6×10^2	1.8×10^2	2.0×10^2	2.2×10^2
6	4.0×10^2	4.5×10^2	4.9×10^2	5.4×10^2	6.0×10^2
7	1.1×10^3	1.2×10^3	1.3×10^3	1.5×10^3	1.6×10^3
8	3.0×10^3	3.3×10^3	3.6×10^3	4.0×10^3	4.4×10^3
9	8.1×10^3	9.0×10^3	9.9×10^3	1.1×10^4	1.2×10^4

$a \setminus b$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	1.6×10^0	1.8×10^0	2.0×10^0	2.2×10^0	2.5×10^0
1	4.5×10^0	5.0×10^0	5.5×10^0	6.0×10^0	6.7×10^0
2	1.2×10^1	1.3×10^1	1.5×10^1	1.6×10^1	1.8×10^1
3	3.3×10^1	3.7×10^1	4.0×10^1	4.5×10^1	4.9×10^1
4	9.0×10^1	9.9×10^1	1.1×10^2	1.2×10^2	1.3×10^2
5	2.4×10^2	2.7×10^2	3.0×10^2	3.3×10^2	3.7×10^2
6	6.7×10^2	7.4×10^2	8.1×10^2	9.0×10^2	9.9×10^2
7	1.8×10^3	2.0×10^3	2.2×10^3	2.4×10^3	2.7×10^3
8	4.9×10^3	5.4×10^3	6.0×10^3	6.6×10^3	7.3×10^3
9	1.3×10^4	1.5×10^4	1.6×10^4	1.8×10^4	2.0×10^4

問題 ［5］

図 5-1 に示すように，水平な滑らかな床の上に，２つの質点（質点１および質点2）がばねで連結されて置かれ，一次元運動系を形成している。質量m_1の質点１は壁に結ばれたばね定数k_1のばねで，質量m_2の質点２は質点１とばね定数k_2のばねで接続されている。ばねの質量は無視できるとして，次の問１）～4）に答えよ。

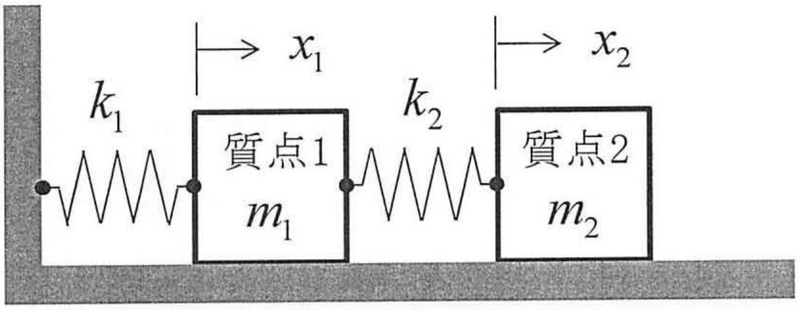

図 5-1　一次元運動系

1）図 5-1 に示すように，つり合い位置からの質点 1，質点 2 の変位x_1，x_2を使用し，質点１および質点２の各々に対する運動方程式を表せ。

2）問 1）の２つの運動方程式から変位x_1に対する１つの微分方程式を求めよ。

3）$m_2 = 2m_1$，$k_2 = 3k_1/2$の場合，問 2）の変位x_1の一般解を求めよ。なお，三角関数を用いて記せ。

4）問 3）を用いて，変位x_2を表せ。

問題[6]

1．　電磁気学におけるマクスウェルの方程式を全て記せ。なお，式中に現れる全ての変数の名称を明記すること。

2．　図６-１のように，デカルト座標系 xyz において，媒質 I と媒質 II が平面 $z=0$ で接している。誘電率および透磁率を，媒質 I において ε_{I} および μ_{I}，媒質 II において $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ および μ_{II} とする。

(a) 媒質 I において xz 平面に平行に進む波長 λ_1 の平面電磁波が，入射角 θ_1 で平面 $z=0$ へ入射している。ただし，$0<\theta_1<\pi/2$ とする。その入射波の電界 $\boldsymbol{E}_1$ は時間 t と場所 (x,y,z) の関数として

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_{\mathrm{inc}}\sin(\boxed{\text{（イ）}}\,t-\boxed{\text{（ロ）}}\,x-\boxed{\text{（ハ）}}\,y-\boxed{\text{（ニ）}}\,z-\phi) \qquad (1)$$

と表せる。ここで ϕ は定数である。(イ)～(ニ)を上述の諸量を用いて表せ。ただし，$\boldsymbol{E}_1$ および $\boldsymbol{E}_{\mathrm{inc}}$ を用いずに表すこと。

(b) 入射した電磁波の一部は反射し，一部は屈折して媒質 II に伝わるとする。屈折波の媒質 II における電界は

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{\mathrm{A}}\sin(\boxed{\text{（ホ）}}\,t-\boxed{\text{（ヘ）}}\,x-\boxed{\text{（ト）}}\,y-\boxed{\text{（チ）}}\,z-\phi) \qquad (2)$$

と表せ，反射波の媒質 I における電界は

$$\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}\sin(\boxed{\text{（リ）}}\,t-\boxed{\text{（ヌ）}}\,x-\boxed{\text{（ル）}}\,y-\boxed{\text{（ヲ）}}\,z-\phi) \qquad (3)$$

と表せる。(ホ)～(ヲ)を上述の諸量を用いて表せ。ただし，$\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{inc}}$，$\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{A}}$，$\boldsymbol{E}_3$，および $\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}$ を用いずに表すこと。

(c) 式(1)～(3)における $\boldsymbol{E}_{\mathrm{inc}}$，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{A}}$，および $\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}$ の間に成立する関係式を表せ。

(d) 入射電磁波の波数ベクトル $\boldsymbol{k}_1$ を上述の諸量を用いて示した上で，入射波の磁界 $\boldsymbol{H}_1$ と $\boldsymbol{k}_1$ および $\boldsymbol{E}_1$ の関係式を表せ。

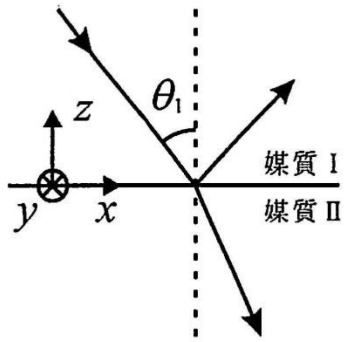

図６－１

問題［7］

1. 単原子分子からなる理想気体1 mol（気体Aとする）が温度273 K，圧力1.01×10^5 Paの状態(状態Iとする)にある。この気体Aを状態Iのときの体積の1/3にまで等温可逆的に圧縮し，ついで圧力1.01×10^5 Paまで断熱可逆的に膨張させたところ，気体Aの体積は0.0145 m^{3}となった。次の各問に答えよ。なお，気体定数を8.31 J·K^{-1}·mol^{-1}とし，必要があれば，$\ln 2 = 0.693$，$\ln 3 = 1.10$，$\ln 5 = 1.61$，$\ln 7 = 1.95$を用いよ。

(1) 気体Aが外界に対してなした総仕事量を求めよ。

(2) 気体Aに流入した総熱量を求めよ。

(3) 気体Aのエントロピーの総変化量を求めよ。

2. 図7-1は，圧力が一定の場合における成分Aと成分Bからなる2成分混合物の固液平衡関係を，横軸に成分Aのモル分率x_Aを，縦軸に温度Tをとり，表わしたものである。成分Aと成分Bは，液体では任意の混合比において溶解し，固体では全く相互に溶解せず，共融混合物を形成する。以下の問いに答えよ。

(1) 成分Aおよび成分Bの融点を図7-1中の記号を用いて示せ。

(2) 共融混合物における成分Aのモル分率x_Aおよび共融混合物の融点を図7-1中の記号を用いて示せ。

(3) 図7-1中の点P，点Q，点R，および点Sで表される混合物の状態を以下の(*a*)～(*i*)の選択肢から選べ。

(*a*) 共融混合物の液体，純粋な成分Aの固体，および純粋な成分Bの固体の3相

(*b*) $x_A = x_1$の液体の1相

(*c*) $x_A = x_5$の液体の1相

(*d*) 純粋な成分Bの固体と$x_A = x_2$の液体の2相

(*e*) 純粋な成分Aの固体と$x_A = x_4$の液体の2相

(*f*) 純粋な成分Aの固体と純粋な成分Bの固体の2相

(*g*) $x_A = x_2$の液体と$x_A = x_4$の液体の2相

(*h*) 純粋な成分Bの固体と$x_A = x_4$の液体の2相

(*i*) 純粋な成分Aの固体と$x_A = x_2$の液体の2相

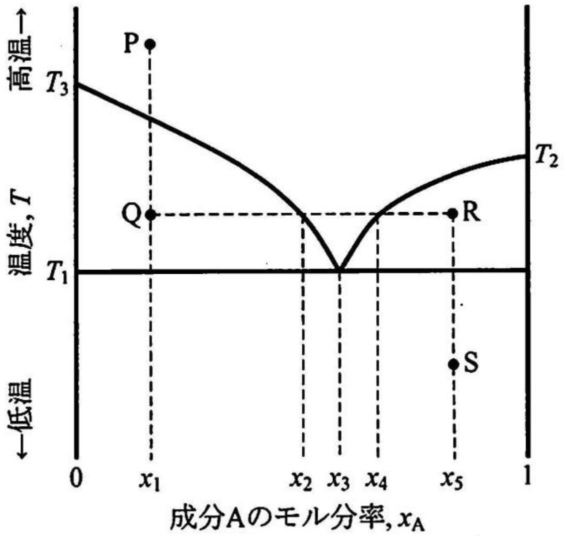

図7-1