専門科目（午前）　　　　　　　　　　　23　大修

国際開発工学　　　　　　　　　　　時間 9:30~11:30

注意事項

1. 次の [1]国際開発に関する基礎知識, [2]微分積分学, [3]線形代数学, [4]確率・統計, [5]力学, [6]電気磁気学, [7]熱力学 の中から, [1]を含んで４題を選択して解答せよ。
2. 解答は１題ごとに別々の解答用紙(各題１枚)に記入せよ。
3. 各解答用紙に必ず問題番号及び受験番号を記入せよ。
4. 定規, コンパス, 電卓は使用不可である。

問題 ［1］

1. 国際開発に関連する次の略称の正式名称を，英語または日本語で記述せよ。
   ① IMF　　② JICA　　③ UNICEF
   ④ ASEAN　　⑤ ODA

2. 多くの開発途上国に共通する現象の一つは，農村部より都市部に人口が一方的に流入していることである。この人口流入がもたらす都市部における弊害の事例を一つ上げ，その解決のために技術や政策が果たしうる役割について，自らの意見を 300 字程度で記述せよ。

3. 近年，開発途上国におけるある種の問題解決のためには，国際機関や各国政府に代表される公的部門の役割のみならず，民間部門の役割にも注目が集まっており，両部門の対等な連携の必要性が強く唱えられている。そこで以下の問いに答えよ。

   3-1. 公的部門と民間部門の連携が求められている背景や理由について，300 字程度で記述せよ。

   3-2. 開発途上国における問題解決のために，公的部門と民間部門の役割分担のあり方，あるいは両部門が共に問題解決のために貢献している事例，いずれかについて，300 字程度で記述せよ。

問題［2］

１．以下の微分方程式の一般解を求めよ。

（１） $f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = 2$

（２） $f''(x) + 16f'(x) + 64f(x) = 0$

２．以下の微分方程式の数学上の用語について５０字程度で説明せよ。

（１）　常微分方程式と偏微分方程式

（２）　線形と非線形

（３）　同次形と非同次形

３．以下の問いに答えよ。

（１）以下の微分方程式を解け。

$$\frac{dN}{dt} = aN$$

aは定数で，t=0 で$N = N_0$とする。

（２）以下の微分方程式を解け。

$$\frac{dN}{dt} = (a - bN)N$$

a, b は$ab \neq 0$を満たす定数とする。

また，　t=0 で$N = N_0$とし,ここで$N_0 \neq a/b$とする。

４．以下の偏微分方程式について答えよ。

$$\frac{\partial N}{\partial t} = K\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$$　　ただし，Kは正の定数とする。

（１） $N(t,x) = T(t) \times X(x)$として上式に代入し，$T(t), X(x)$それぞれに対する常微分方程式を導け。

（２） $T(t), X(x)$それぞれの常微分方程式に対する一般解を導け。

（３）この偏微分方程式が適用できる物理上あるいは工学上の現象例を１つ挙げよ。

問題 [3]

自然数 N に対して，N 次元実ベクトル空間 R^N を考える。ベクトル $\boldsymbol{x}$ および行列 A の転置を，それぞれ，$\boldsymbol{x}^T$ および A^T で表す。R^N のベクトル $\boldsymbol{x}$ は列ベクトル

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$$

で表されるものとする。R^N のベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)^T$ の内積 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ を，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

で定義し，$\boldsymbol{x}$ のノルム $\|\boldsymbol{x}\|$ を $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$ で定義する。また，$N \times N$ の単位行列を I_N で表す。$N \times N$-行列 U が直交行列であるとは，

$$U^T U = U U^T = I_N$$

を満たすことである。このとき，以下の問に答えよ。なお，解答には導出過程を記すこと。

1. 任意の $N \times N$ の直交行列 U と，R^N の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$\|U\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が成立することを示せ。

2. $N \times N$ の直交行列の行列式が取りうる値を全て答えよ。

3. 任意に固定した $N \times N$ の直交行列 U の (i, j) 要素を u_{ij} で表す。自然数 M $(M \leq N)$ に対して，M 次元実ベクトル空間 R^M を考え，$\{\boldsymbol{\phi}_j\}_{j=1,2,\ldots,M}$ を R^M の正規直交基底とする。R^M のベクトル $\boldsymbol{\psi}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ を，

$$\boldsymbol{\psi}_i = \sum_{j=1}^{M} u_{ij} \boldsymbol{\phi}_j \tag{3–1}$$

とおく。このとき，R^M の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{\psi}_i \rangle \boldsymbol{\psi}_i = \boldsymbol{a}$$

が成立することを証明せよ。

4. $M = 2$，$N = 3$ のとき，式 (3–1) から構成される $\boldsymbol{\psi}_1$, $\boldsymbol{\psi}_2$, $\boldsymbol{\psi}_3$ の例を作成せよ。ただし，$\{\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \boldsymbol{\psi}_3\}$ に含まれる任意の 2 つのベクトルが 1 次独立になるようにせよ。

5. $\boldsymbol{a}$ を R^2 の任意のベクトルとする。4. で定めた $\boldsymbol{\psi}_1$, $\boldsymbol{\psi}_2$, $\boldsymbol{\psi}_3$ に対して，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{\psi}_1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{\psi}_2 \rangle$ の値だけから，

$$\sum_{i=1}^{2} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{\psi}_i \rangle \boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{a}$$

とすることによって，$\boldsymbol{a}$ を復元できる R^2 のベクトル $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ を定めよ。

問題［4］

連続確率変数 XとY の同時確率密度関数 $f_{XY}(x, y)$を式(4-1)のように定める。

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} x+y & (0<x<1 \quad \text{かつ} \quad 0<y<1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{4-1}$$

下記の問いに答えよ。

1．X 単独の確率密度関数，および Y単独の確率密度関数をそれぞれ求めよ。
2．yが与えられたときの Xの条件付き確率密度関数，およびxが与えられたときの Yの条件付き確率密度関数をそれぞれ求めよ。
3．X，Y，積 XYの期待値をそれぞれ求めよ。
4．Xと Yの共分散を求めよ。また共分散の値から，Xと Yの関係を簡潔に説明せよ。概念図を用いてもよい。

問題 ［5］

図に示すような点荷重が作用する場合

1. 図 5-1(a)および図 5-1(b)に示す系(a)，(b)で各々剛体を支える力V_A，V_B，H_Bを求めよ。ただし，A 点は水平方向に移動自由であり，回転自由である。B 点は水平・垂直に移動できないが回転自由である。なお，(a)の半円弧 ACB，(b)の一体化した棒 ACB は質量がないものとし，作用している力と剛体は，同一平面上にあるものとする。

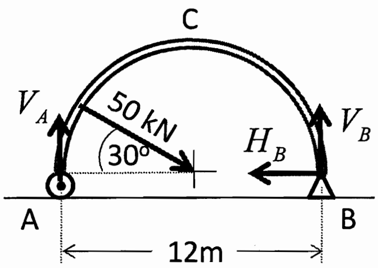

図 5-1(a)

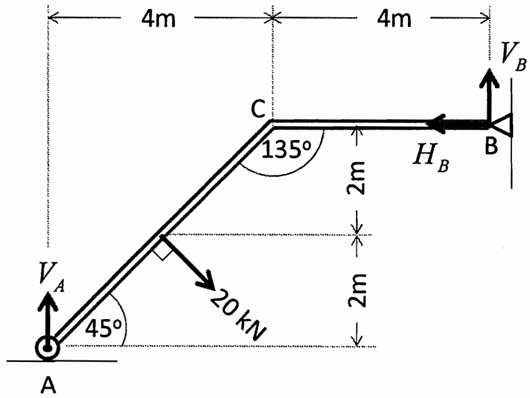

図 5-1(b)

2. 図 5-2 に示すように，水平面 AB と角度θ_1をなす斜面 CA に置かれた質量m_1のおもり 1，水平面 AB と角度$\pi/2-\theta_1$をなす斜面 CB に置かれた質量m_2（$m_1 > m_2$）のおもり 2 を質量のない糸の両端にたるみのないよう連結し，斜面の頂上 C にある滑らかな軸にその糸をかけ，静かに放したところ，おもり 1 は斜面に沿って降下しはじめた。おもりは移動する場合には回転せず，斜面上に沿ってのみ移動するものとする。また，斜面と各おもりとの間の動摩擦係数をμとし，一定であるものとする。なお，糸は伸び縮みせず，重力加速度をgとする。

(a)図に示すxy座標系を使用し，おもり 1 に対するy座標方向およびおもり 2 に対するx座標方向の運動を微分方程式で表せ。

(b)おもり 1 の斜面 CA の向きの加速度を定めよ。

(c)糸の張力を定めよ。

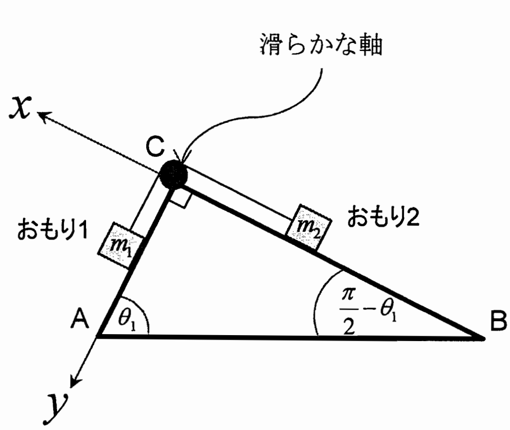

図 5—2

「国際開発工学」の問題に一部補足しました。

入試委員 高田 潤一

問題[6]

式(6-1)～式(6-4)は電磁気学におけるマクスウェルの方程式である。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \tag{6-1}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{6-2}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{6-3}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = j + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{6-4}$$

ここで，$\boldsymbol{E}$は電場（電界），$\boldsymbol{H}$は磁場（磁界），$\boldsymbol{D}$は電束密度，$\boldsymbol{B}$は磁束密度，$\boldsymbol{j}$は電流密度であり，いずれもベクトル量である。ρは電荷密度であり，スカラー量である。真空の透磁率をμ_0，真空の誘電率をε_0とし，以下の問に答えよ。解答において，本問題中に定義されていない量の記号（変数や定数）を用いる必要がある場合は，その定義を明記すること。

1．　真空における$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{H}$の関係式を記せ。

2．　真空における$\boldsymbol{D}$と$\boldsymbol{E}$の関係式を記せ。

3．　式(6-1)はガウスの法則の微分形である。この法則を積分形で表せ。

4．　電束密度が時間とともに変化しないとき，式(6-4)の右辺第二項はゼロベクトルとなる。その場合の式(6-4)は誰の法則と呼ばれているか？

5．　以下は光（電磁波）の伝わる速度に関する記述である。$\boxed{\text{(a)}}$ ～$\boxed{\text{(d)}}$ に入る適切な数式を上述の変数や定数を用いて記せ。
真空の空間に電荷が無く，そのため電流も存在しない状況を想定せよ。この状況において，空間３方向の３成分をもつ電場と磁場があるとする．この電場と磁場はマクスウェルの方程式を満足する．式(6-2)の両辺の rot を取ると

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\boxed{\text{(a)}} \tag{6-5}$$

が得られる。式(6-5)と式(6-4)を組み合わせると，

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{E}) = -\boxed{\text{(b)}}\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{6-6}$$

が得られる。ここで，数学的に

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{E}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{6-7}$$

が成り立つことを利用すると

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \boxed{\text{(c)}}\ \nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{6-8}$$

が得られる。式(6-8)は波動方程式である。この波動方程式における波の伝わる速さは$\boxed{\text{(d)}}$であるが，これが光速である。

問題 [7]

メタンCH_4およびエタンC_2H_6の完全燃焼はそれぞれ次の反応式で表される。

$$CH_4\ (\text{気体}) + 2O_2\ (\text{気体}) \rightarrow CO_2\ (\text{気体}) + 2H_2O\ (\text{気体})$$

$$C_2H_6\ (\text{気体}) + \frac{7}{2}O_2\ (\text{気体}) \rightarrow 2CO_2\ (\text{気体}) + 3H_2O\ (\text{気体})$$

以下の問いに答えよ。ただし，全ての気体を理想気体とする。

1. 298 K，100 kPaにおける，CH_4の完全燃焼の反応熱およびC_2H_6の完全燃焼の反応熱を求めよ。ただし，このときのCH_4 (気体)，C_2H_6 (気体)，O_2 (気体)，CO_2 (気体)，およびH_2O (気体) の生成熱を，それぞれ，$-70\ \text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$，$-80\ \text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$，$0\ \text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$，$-390\ \text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$，および $-240\ \text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$とする。

2. CH_4のモル分率が0.9であるCH_4とC_2H_6の混合物A 1 molを完全燃焼させるのに最低限必要な空気のモル数を求めよ。ただし，空気はO_2およびN_2のみからなり，O_2のモル分率を0.2とし，N_2は不活性とする。

3. 2.で求めた量の空気中において，初期の温度を298 Kとし，定圧(100 kPa)および断熱で混合物A 1 molを完全燃焼させた場合の最高温度を求めよ。ただし，N_2を不活性とし，燃焼後に存在する気体の平均の定圧モル比熱を$0.038\ \text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$とする。

4. 2.で求めた量の1.5倍の空気中において，3.と同様の条件で混合物A 1 molを完全燃焼させた場合の最高温度を求めよ。ただし，N_2を不活性とし，燃焼後に存在する気体の平均の定圧モル比熱を$0.035\ \text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$とする。